

UiO : **Matematisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Oppstrøms virkning fra skip med lave Froudetall

Solveig Masvie

Masteroppgave våren 2015



Oppstrøms virkning fra skip med lave Froudetall

Solveig Masvie

26. mai 2015

Sammendrag

Oppstrøms virkning fra skip med lavt Froudetall er studert. De klassiske langbølgemodellene KdV og Boussinesq er brukt i tillegg til en lineær og fullt dispersiv modell. Beregninger er gjort for åpent hav og kanaler med ulik vidde. Effekten av en overgang til grunnere vann er undersøkt med en variabel bunntopografi. Arbeidet er motivert av bølgefenomener i Oslofjorden observert foran Color Magic. Observasjoner fra Askholmene, i de smale og grunne farvannene, nord for Drøbak er særlig vektlagt. Beregninger gjort med flat bunn har vist at baugbølgen ikke løper fra skipet ved en stasjonær påvirkning, verken ved ubegrenset hav, eller i kanal på 200 m. Det er vist at å seile med konstant hastighet inn mot grunnere vann vil utløse en bølgeutsending oppstrøms. Utsendingen er påvist både for ubegrenset hav og kanaler med bredde på 200 m, 500 m og 1 km. I parameterområdet som er undersøkt er bølgehøyden til den fraløpende bølgen proporsjonal med størrelsen til skipet. En proporsjonal sammenheng er også funnet mellom bølgehøyden og dybdeendringen, men denne er ikke like tydelig. En høyere hastighet gir en mye større effekt på bølgehøyden enn en lineær økning.

Innhold

1	Introduksjon	1
1.1	Historien	1
1.2	Tidligere arbeider	1
1.3	Målsetning	3
2	Grunnleggende ligninger	5
2.1	Feltlikningene	5
2.2	Grensebetingelsene	6
2.3	Skalering	7
3	Modellering av skip og bunnforhold	9
3.1	Skipene	9
3.2	Trykkfordelingen	9
3.3	Bunnforholdene	10
3.4	Beregningsdomenet	11
3.5	Oppstarten	12
4	Langbølgemodeller	13
4.1	Ligningene	13
4.1.1	Boussinesqligningene	13
4.1.2	KdV-ligningene	16
4.2	Implementasjon og verifikasjon av KdV-ligningen	17
4.2.1	Fouriertransformasjon av ligningen	17
4.2.2	Tidsintegrasjon med Runge-Kutta 4	17
4.2.3	Lineær verifikasjon	18
4.2.4	Ikke-lineær verifikasjon med soliton	19
4.3	Todimensjonale beregninger med KdV-modellen	20
4.4	Implementasjon av de todimensjonale Boussinesqligningene	21
4.5	Todimensjonale beregninger med Boussinesqmodellen . . .	22
4.6	Implementasjon av de tredimensjonale Boussinesqligningene	23
4.7	Tredimensjonale beregninger med Boussinesqmodellen . . .	24
5	En lineær og fullt dispersiv modell	27
5.1	Utleddning av metoden	27
5.1.1	Potensialet definert på overflaten og bunnen	27
5.1.2	Greenfunksjonen og Fouriertransform	28
5.2	Matriseformulering	32
5.3	Verifikasjon	34

5.3.1	Sammenligning med analytisk løsning	34
5.3.2	Sammenligning av to koder	36
6	Resultater fra den lineære og fullt dispersive modellen	39
6.1	Flat bunn	39
6.1.1	Sammenligning med Boussinesq	39
6.1.2	Kanalbredde på 200m	40
6.1.3	Ubegrenset utstrekning	41
6.2	Variabel bunn	43
6.2.1	Bunntopografien og trykkforstyrrelsen	43
6.2.2	Definisjon av bølgelengden	43
6.2.3	Ubegrenset utstrekning	44
6.2.4	Kanalbredde på 1km	45
6.2.5	Kanalbredde på 500m	45
6.2.6	Kanalbredde på 200 m	46
6.3	Effekten av ulike parametre	48
6.3.1	Kanalbredden	48
6.3.2	Fortrengt volum	49
6.3.3	Dybdeendringen	50
6.3.4	Hastigheten	51
6.4	Trykkfordelingen	52
7	Konklusjon	55
7.1	Videre arbeid	58
	Appendices	61
A	Detaljer fra utledningen av den lineære og fullt dispersive metoden	61
A.1	Rekkeutvikling av ledd i Greenfunksjonene	61
A.2	Omskriving og fouriertransformasjon av $\frac{1}{R_a}$	63
A.3	Fouriertransform av $\frac{1}{R}$	65
A.4	Fouriertransformasjon av ledd i Greenfunksjonen	65
A.5	Utgangning av e^{-Mt}	66
B	Aliasing	67
C	En eksakt løsning av KdV-ligningen	69
D	Beregninger fra KdV-programmet sammenlignet med publiserte resultater	71
E	En bølgende hevning	73
F	Kildekode	75
F.1	Moderklasse	75
F.2	Datterklasse med trykkforstyrrelse	79

G	Beregninger med flat bunn	81
G.1	Tidsutvikling med Froudetall en halv	81
G.2	Froudetallsutvikling ved $T[\sqrt{H_0/g}] = 150$	82
G.3	Kanalbredde på 200m	83

Anerkjennelse

Jeg vil takke John Grue fordi han introdusere meg for bølgemysteriet i Oslofjorden, og for all veiledning i arbeidet for å beskrive dette mysteriet. Jeg vet ikke hvor denne oppgaven hadde endt uten hans rettledning. Videre vil jeg takke Geir Pedersen for alt han har lært meg om Boussinesqmodellen og numerisk implementasjon av den. Jeg var også heldig som fikk lov til å bruke programmet hans, skrevet med STORE BOKSTAVER i Fortran 77. Erika Lindstrøm takkes fordi hun har gitt nyttige tilbakemeldinger på introduksjonen og konklusjonen min, men først og fremst for å være en motivator og gledesspreder.

Å komme hjem hver kveld til en stue hvor stemningen er god, latteren sitter løst, og ingen forstår fluidmekanikk, har vært veldig godt for meg. Derfor vil jeg rette en stor takk til alle i Duehuset, særlig lillesøster Johanne.

Sist, men aller mest vil jeg takke alle medstudentene på lesesalen. De har sørget for god stemning hver dag. De har lokket meg tilbake til tung koffeinavhengighet. Og de har, selvfølgelig, holdt et internasjonalt høyt faglig nivå.

Jeg kommer til å tenke tilbake på tiden i 9 etg. med takknemlighet i hjertet og et smil om munnen.

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Historien

Mange har observert merkelige bølge- og strømningsfenomener i Oslofjorden uten å forstå hverken hvordan eller hvorfor det skjer. På Askholmene nord for Drøbak er det observert en særlig sterk effekt. Fenomenet har blitt koblet til passering av skipet Color Magic eller dets søsterskip. Det merkelige er at effekten kom før båten hadde passert, altså var det en bølge foran båten. Mange mente også at det kun var ved passering av Color Magic eller søsterskipet at bølgen kom, og ikke fra noen av de mindre skipene med samme rute, som Pearl Seaways. Flere ringte inn til NRKP2-programmet "Ekko" som blant annet tar for seg forskning og vitenskap. En av programlederne i "Ekko", prøvde å finne noen som kunne forklare det som syntes som et lite bølgemysterium. I den anledning kom han i kontakt med J. Grue, professor i fluidmekanikk, og senere min veileder. J. Grue hadde ingen god forklaring på fenomenet, men syntes det var veldig interessant. Det er nemlig gjort lite forskning på oppstrøms virkning fra skip, som over samme dyp, seiler så sakte som Color Magic gjør .

1.2 Tidligere arbeider

Uttrykkene oppstrøms virkning og oppstrøms effekt brukes her om bølger eller strømning som beveger seg i samme retning som forstyrrelsen som forårsaket dem. De må ha en hastighet som er høyere enn den forstyrrelsen beveger seg med, og er derfor lokalisert foran forstyrrelsen. Historisk har forskning om oppstrøms virkning fokusert på hastigheter rundt gruntvannshastigheten, som er hastigheten til en uendelig lang bølge. Med dybde H_0 er gruntvannshastigheten $\sqrt{gH_0}$. Ved å skalere hastigheten til skipet med gruntvannshastigheten får vi Froudetallet, og kritisk hastighet har Froudetall lik én. Til sammenligning er Froudetallet til Color Magic på de grunneste områdene omkring en halv. I tillegg til teoretiske arbeider [1],[25], finnes det mange todimensjonale numeriske studier [33], [23]. En rekke eksperimenter er utført i smale kanaler [11], [10] hvor bølgefeltet oppstrøms har vært tilnærmet todimensjonalt. I dette regimet genereres ikke-lineære bølger med permanent form og konstant hastighet kalt solito-

ner. Interessen for oppstrøms virkning startet da J.S. Russell i 1834 publiserte sin observasjon av solitoner. I "Report on Waves" [31] skriver han at en båt ble slept i en smal kanal, og når båten stoppet fortsatte en bølge videre i kanalen, vekk fra båten. Bølgen beholdt tilsynelatende både form og hastighet, og Russell fulgte etter bølgen i en og en halv til tre km. Den matematiske beskrivelsen av dette fenomenet ble startet av J. Boussinesq i en artikkel som kom ut i 1871 [3]. Der konstruerte han en tilnærming til solitonbølgen, og nevner også observasjonene til Russel. Ligningene vi nå kjenner som Boussinesqligningene ble beskrevet av Boussinesq året etter [4]. De beskriver svakt ikke-lineære og moderat lange bølger. Ligningene er tredimensjonale, og kan utvides til å inkludere en variabel bunn. Lord Rayleigh publiserte også en artikkel med matematisk teori som støttet observasjonene til Russel [30]. Boussinesq introduserte også ligningen vi nå kaller KdV-ligningen i 1877 [2], men den ble gjenoppdaget i 1895 av D.J. Korteweg og G. de Vries [20], og fikk derfor navnet Korteweg-de Vries-ligningen, som ofte forkortes til KdV-ligningen. Ligningen er basert på samme antakelser som Boussinesqligningene, men er begrenset til todimensjonale bølger med bevegelse i én retning over flat bunn. Da en numerisk løsning av KdV-ligningen ble introdusert av N.J. Zabusky og M.D. Kruskal i 1965 [34] økte interessen for ligningen. Blant de som har arbeidet med ligningen er C.C. Mei [25], T.Y. Wu [33], R.C. Ertekin [10], R.S. Johnson [19], T.R. Akylas [1] og Madsen [24]. T.R. Akylas [1] studerte bølgen generert av et trykkfelt med konstant kritisk hastighet og viste at den lineære tilnærmingen til slutt bryter sammen. Den ikke-lineære teorien brøt ikke sammen, og ved en numerisk studie av den tvungne KdV-ligningen fant han at en serie solitoner ble generert i front av trykkforstyrrelsen. Samme år publiserte R.C. Ertekin, W. C. Webster og J. V. Wehausen [11] resultater fra eksperimenter som viste at Froudetallet måtte være mindre enn omtrent 1.2 for at solitoner skulle bli generert. Den øvre Froudetallsgrensen for solitonutsendelse hadde tidligere, ved beregninger, blitt satt til 1.175 av D. B. Huang m.fl. [18]. I 1986 sammenlignet C.C. Mei numeriske todimensjonale resultater med eksperimenter gjort med skip i grunne kanaler [25]. Han fant at smale skip med nær kritisk hastighet i grunne kanaler kan sende ut solitoner oppstrøms med bølgefronter som står normalt på skipets bevegelse. Disse solitonene viste seg å stemme med den todimensjonale tvungne KdV-ligningen til ledende orden. KdV-ligningen ble ved hjelp av numerikk nærmere undersøkt av Wu [33]. Wu brukte en trykkfordeling for å representere en forstyrrelse og så på de grunnleggende mekanismene som forårsaket fenomenet med solitoner oppstrøms. I 1988 fant G. K. Pedersen [28] at oppstrøms utsending av solitoner må forventes, hvertfall teoretisk, i kanaler av en hvilken som helst vidde. Dette sto i kontrast til R.C. Ertekin [10], og R.C. Ertekin, W.C. Webster og J.V. Wehausen [11] som identifiserte forholdet mellom tverrsnittet til skipet og tverrsnittet til kanalen som den viktige geometriske parameteren. G. K. Pedersen så også på ulike måter å modellere et skip på, og fant at en trykkfordeling og en kildefordeling gav veldig like resultater. S.J. Lee, G.T. Yates og T.Y. Wu [23] koblet teoretisk, numerisk og eksperimentelle studier av oppstrøms solitoner. Også de benyttet en trykkfordeling som forstyrrelse. De kaller utsendingen av solitoner et nydelig eksempel på et dynamisk

system som responderer påfallende periodisk på en stasjonær kraft når systemet påvirkes ved resonans.

I 2001 publiserte D. Clamond og J. Grue en rask metode for fullt ikke-lineære beregninger. Metoden er også fullt dispersiv, og har derfor ikke samme krav til verken bølgelengde eller bølgehøyde som Boussinesqligningene og KdV-ligningen. Den betegnes av D. Clamond og J. Grue som rask fordi antall beregninger per tidssteg er på størrelse med $N \log N$, hvor N er antall punkter i beregningsområdet. Til sammenligning vil metoder som bruker endelig differanse ofte utføre N^2 beregninger per tidssteg. Metoden ble først utledet for flat bunn i to og tre dimensjoner. Utvidelsen til variabel bunntopografi er beskrevet av D. Fructus og J. Grue [14], og J. Grue [16]. Metoden har blitt brukt til å beregne indre bølger [16], [17], og det er demonstrert at metoden er effektiv for skipsbølger [6].

1.3 Målsetning

Oppgaven har som mål å beskrive bølge- og strømningsfenomenet observert på Askholmene. Effekten er kun kjent for Color Magic, men skipet Pearl Seaways har samme rute forbi Askholmene. Pearl Seaways er mindre enn Color Magic, så vi ønsker å finne ut om det er en relasjon mellom størrelsen til skipet og effekten oppstrøms. Vi ønsker også å kartlegge om dybdeendring, hastighet til skip, og kanalbredde påvirker virkningen oppstrøms, og hvordan de i så fall gjør det.

Kapittel 2

Grunnleggende ligninger

Koordinatsystemet vårt har horisontale koordinater x_1 og x_2 , og vertikal koordinat y , og vi skriver posisjonen til et punkt som $\mathbf{x} + y\hat{j} = x_1\hat{i}_1 + x_2\hat{i}_2 + y\hat{j}$. Tiden kaller vi t , og hastighetsfeltet skrives

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, y, t) = u_1(\mathbf{x}, y, t)\hat{i}_1 + u_2(\mathbf{x}, y, t)\hat{i}_2 + v(\mathbf{x}, y, t)\hat{j}. \quad (2.1)$$

∇ brukes for den horisontale gradienten,

$$\nabla = \hat{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (2.2)$$

mens notasjonen til den fullstendige gradienten er

$$\text{grad} = \nabla + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Partikkelderivasjon blir også brukt med følgende notasjon

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}. \quad (2.4)$$

2.1 Feltlikningene

Vi antar at vi har et homogent, ikke-viskøst fluid med konstant tetthet. Når fluidet er ikke-viskøst kan ikke rotasjon genereres, og vi anser derfor bevegelsen som virvelfri. Dette er rimelige antakelser for problemet vi ser på, og utledningene vil derfor baseres på dem. Siden fluidet har konstant tetthet er strømmingen inkompressibel. Kontinuitetsligningen reduseres da til

$$\text{grad} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

Eulers bevegelsesligning er gyldig siden fluidet er ikke-viskøst,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

hvor $p = p(\mathbf{x}, y, t)$ er trykket i fluidet og gravitasjonen er $\mathbf{g} = -g\hat{y}$. Siden fluidet er inkompressibelt og homogent, og bevegelsen er virvelfri, kan strømningshastigheten utledes fra et potensial $\phi = \phi(\mathbf{x}, y, t)$ på følgende måte

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi. \quad (2.7)$$

Satt inn i kontinuitetslikningen (2.5) gir dette Laplaces likning

$$\text{grad}^2 \phi = 0 \quad \text{for } -H < y < \eta. \quad (2.8)$$

Eulers bevegelseslikning blir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad } \phi|^2 = -\frac{1}{\rho} p - gy. \quad (2.9)$$

2.2 Grensebetingelsene

Det er to grensebetingelser på den frie overflaten $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$. Den dynamiske betingelsen er at trykket må være kontinuerlig gjennom η . Satt inn i bevegelseslikningen (2.9) gir dette

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad } \phi|^2 + g\eta = -\frac{1}{\rho} p_{\text{ytre}} \quad \text{for } y = \eta. \quad (2.10)$$

Den kinematiske betingelsen krever at det ikke er strøm gjennom den frie overflaten

$$\begin{aligned} \frac{D(y - \eta)}{Dt} &= 0 & \text{for } y = \eta, \\ \phi_y &= \eta_t + \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \eta & \text{for } y = \eta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

På bunnen med lokalt dyp $H = H(\mathbf{x})$, som vi antar er stasjonær, er den kinematiske betingelsen

$$\begin{aligned} \frac{D(y + H)}{Dt} &= 0 & \text{for } y = -H, \\ \phi_y &= -\text{grad } \phi \cdot \text{grad } H & \text{for } y = -H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3 Skalering

For å få ligningene på dimensjonsløs form skaleres lengde med en typisk dybde, H_0 , og ρ og g brukes for å skalere tid og masse.

$$H_0 y = y^*, \quad (2.13a)$$

$$H_0 x_1 = x_1^*, \quad (2.13b)$$

$$H_0 x_2 = x_2^*, \quad (2.13c)$$

$$H_0 H = H^*, \quad (2.13d)$$

$$\rho g H_0 p = p^*, \quad (2.13e)$$

$$H_0 \eta = \eta^*, \quad (2.13f)$$

$$\sqrt{\frac{H_0}{g}} t = t^*, \quad (2.13g)$$

$$H_0 \sqrt{g H_0} \phi = \phi^*. \quad (2.13h)$$

De skalerte operatorene for derivasjon er

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \sqrt{\frac{g}{H_0}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} = \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.14b)$$

$$\nabla^* = \frac{1}{H_0} \nabla. \quad (2.14c)$$

Her er størrelser med dimensjon merket med *. Med denne skaleringen blir de gjeldende ligningene (2.8), (2.10), (2.11) og (2.12) som følger

$$\text{grad}^2 \phi = 0, \quad \text{for } -H < y < \eta, \quad (2.15)$$

$$\phi_t = - \left(\eta + \frac{1}{2} |\text{grad } \phi|^2 + p_{\text{ytte}} \right) \quad \text{for } y = \eta, \quad (2.16)$$

$$\eta_t = \phi_y - \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \eta \quad \text{for } y = \eta, \quad (2.17)$$

$$\phi_y = -\text{grad } \phi \cdot \text{grad } H \quad \text{for } y = -H. \quad (2.18)$$

Kapittel 3

Modellering av skip og bunnforhold

3.1 Skipene

Bølgefenomenet er observert foran skipet Color Magic, og dets søsterskip Color Fantasy, i Oslofjorden. Et annet skip med samme rute i Oslofjorden er Pearl Seaways, men det er ikke observert like stor oppstrøms effekt fra dette skipet. Størrelsen til Color Magic og Pearl Seaways er beskrevet i tabellen under. Bruttotonnasjen gir den øvre grensen for skipenes deplasement, og service farten gir hastighetene.

	Color Magic	Pearl Seaways
Lengde (m)	224	179
Bredde (m)	35	34
Dypgang (m)	6.8	6
Bruttotonnasje (tonn)	75100	40039
Service fart (knop)	22	16

Tabell 3.1: Nøkkeltørrelser i skipsgeometriene [8], [9].

3.2 Trykkfordelingen

En trykkfordeling er brukt for å representere et skip. Funksjonen som er valgt gir anledning til å bestemme lengde og steilhet i begge horisontale retninger. Trykket normaliseres slik at det maksimale trykket er P_m . Den matematiske representasjonen blir da

$$\begin{aligned}\hat{p}(\mathbf{x}, t) &= \left[\tanh \alpha \left((x_1 - a_1) - Ft + \frac{l_1}{2} \right) - \tanh \alpha \left((x_1 - a_1) - Ft - \frac{l_1}{2} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[\tanh \beta \left((x_2 - a_2) + \frac{l_2}{2} \right) - \tanh \beta \left((x_2 - a_2) - \frac{l_2}{2} \right) \right], \\ p(\mathbf{x}, t) &= P_m \frac{\hat{p}(\mathbf{x}, t)}{\max(\hat{p}(\mathbf{x}, t))},\end{aligned}\tag{3.1}$$

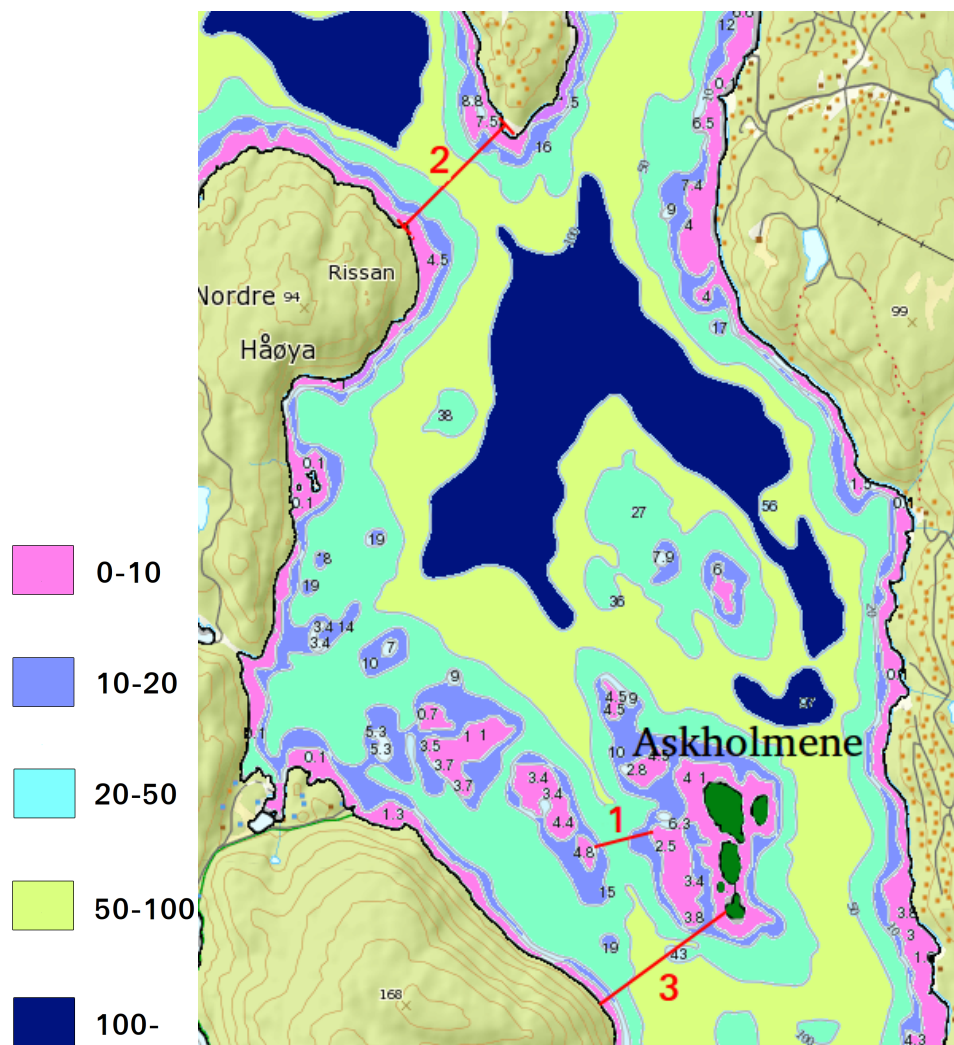
hvor (a_1, a_2) er midtpunktet til funksjonen, l_1 er lengden, l_2 er bredden, α og β bestemmer steilheten henholdsvis longitudinelt og transversalt, F er hastigheten til forstyrrelsen og P_m er amplituden til fordelingen. Alle lengder er skalert med H_0 , mens trykkamplituden er skalert med $\sqrt{\rho g H_0}$. Ved å bruke det hydrostatiske trykket blir $P_m = \frac{d}{H_0}$, hvor d er dypgangen til trykket. Fordelingen er symmetrisk om (a_1, a_2) både i longitudinal og transversal retning. Det ikke er mulig å representere et skrog eksakt med denne trykkfordelingen, men det er valgt å gjengi volumet så nøyaktig som mulig. Volumet er beregnet fra det hydrostatiske trykket, og er tilpasset deplasementet anslått fra bruttotonnasjen. Hastigheten oppgitt som service fart gjenspeiles i Froudetallet som er den skalerte hastigheten definert som

$$F = \frac{U}{\sqrt{gH_0}}, \quad (3.2)$$

hvor U er hastigheten til skipet i m/s .

3.3 Bunnforholdene

Figur 3.1 viser bunnforholdene rundt Askholmen , som er stedet hvor det er observert kraftigst effekt oppstrøms. Bølge- og strømningsfenomenene opptrer ved den sørligste holmen når skipet seiler ut av fjorden. Vi ser at skipet må passere trange, og grunne farvann. Avstanden i rødt ved (1) er 185 m, ved (2) 430 m, og ved (3) er den 520 m.



Figur 3.1: Dybdedata fra området rundt Askholmene. Kartet er hentet fra kystverket [21] men fargene er endret for å gjøre det lettere å skille de ulike dybdeområdene.

3.4 Beregningsdomenet

Å representere bunnforholdene i Oslofjorden nøyaktig er utenfor fokusområdet for oppgaven. Likevel er de faktiske bunnforholdene brukt for å bestemme de forenklete beregningsdomenene. De ulike beregningsdomenene er ubegrenset utstrekning og kanal, begge for flat bunn og variabelt dyp.

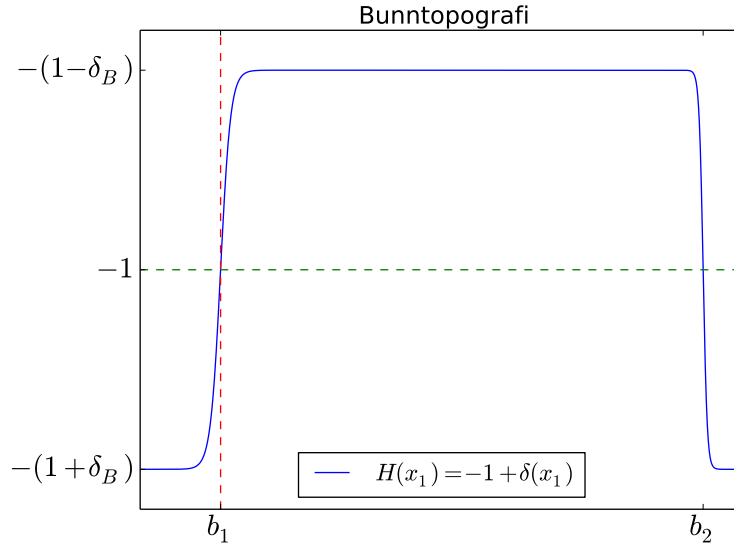
For beregninger med variabelt dyp benyttes en bunntopografi på følgende skalerte form

$$H(x) = -1 + \delta(x), \quad (3.3)$$

hvor δ er definert som

$$\delta = \delta_B [\tanh \mu (x_1 - b_0) - \tanh \nu (x_1 - b_1) - 1]. \quad (3.4)$$

μ bestemmer hvor bratt helningen mot det grunne området er, og b_0 gir midtpunktet på helningen, altså der dypet er H_0 . Siden Fouriertransformasjon blir brukt må bunnen være periodisk. δ har derfor samme verdi i begge endene av domenet. ν og b_1 bestemmer overgangen fra grunt til dypt vann.



Figur 3.2: Bunntopografien

3.5 Oppstarten

Når simuleringene starter er både hastigheten og amplituden til trykkfordelingene null. Begge øker frem til full hastighet og styrke er oppnådd. Parameteren t_0 bestemmer hvor rask oppstarten er. For å finne posisjonen til trykkfordelingen må den tidsavhengige hastigheten integreres. Hastighet, amplitude, og posisjon beskrives ved

$$F = \begin{cases} F_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) & \text{for } \frac{t}{t_0} \leq \frac{\pi}{2} \\ F_0 & \text{for } \frac{t}{t_0} > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$P_m = \begin{cases} P_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) & \text{for } \frac{t}{t_0} \leq \frac{\pi}{2} \\ P_0 & \text{for } \frac{t}{t_0} > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$x_{1,\text{pos}} = \begin{cases} F_0 t_0 \left(1 - \cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\right) & \text{for } \frac{t}{t_0} \leq \frac{\pi}{2} \\ F_0 \left(t - t_0\left(\frac{\pi}{s} - 1\right)\right) & \text{for } \frac{t}{t_0} > \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (3.7)$$

Kapittel 4

Langbølgemodeller

4.1 Ligningene

4.1.1 Boussinesqligningene

KdV-ligningene utledes fra Boussinesqligningene, og Boussinesgligningene utledes derfor først. Siden J. Boussinesq sin utledning av ligningene [4] er på fransk følger vi utledningen fra "Theory and applications of ocean surface waves" [26] som i likhet med Boussinesq bruker en rekkeutvikling av hastighetspotensialet i den vertikale koordinaten. Ved å bruke hastighetspotensiale får man tredimensjonale ligninger på en ryddig måte. Et ytre trykkfelt er lagt til i utledningen slik at en trykkfordeling kan benyttes for å representere et skip.

Det er en fordel med dimensjonsløse variabler, men det brukes en litt annen skalering enn det som er brukt i delkapittel 2.3. Her brukes en skalering som sørger for at de dimensjonsløse variablene er av størrelsesorden en, og små størrelser identifiseres med egne parametre.

$$\frac{H_0}{\mu} \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \quad (4.1)$$

$$H_0 y = y^*, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{H_0}{g}} t = t^*, \quad (4.3)$$

$$\epsilon H_0 \eta = \eta^*, \quad (4.4)$$

$$\frac{\epsilon H_0}{\mu} \sqrt{g H_0} \phi = \phi^*, \quad (4.5)$$

$$\epsilon \rho g H_0 p = p, \quad (4.6)$$

hvor * merker variablene med dimensjon, og de nye variablene ϵ og μ er definert som

$$\mu \equiv k H_0, \quad \epsilon \equiv \frac{A}{H_0}. \quad (4.7)$$

μ antas å være liten, og ϵ antas å være av størrelsesorden μ^2 . Ved å ta med ledd opp til $O(\mu^2)$ og $O(\epsilon)$ får man ligninger som er gyldig for svakt ikke-linære, og moderat lange bølger på grunt vann. Ved å anvende skaleringen ovenfor, og anta flat bunn kan Laplaces ligning og grensebetingelsene skrives

$$\mu^2 \nabla^2 \phi + \phi_{yy} = 0 \quad \text{for } -1 < y < \epsilon\eta, \quad (4.8)$$

$$\mu^2 (\eta_t + \epsilon \nabla \phi \cdot \nabla \eta) = \phi_y \quad \text{for } y = \epsilon\eta, \quad (4.9)$$

$$\mu^2 (\phi_t + \eta) + \frac{\epsilon}{2} (\mu^2 |\nabla \phi|^2 + \phi_y^2) = -\mu^2 p \quad \text{for } y = \epsilon\eta, \quad (4.10)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{for } y = -1. \quad (4.11)$$

Siden ϕ er analytisk, kan vi utvikle ϕ som en potensrekke i den vertikale koordinaten.

$$\phi(x_1, x_2, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n \phi_n, \quad (4.12)$$

hvor $\phi_n = \phi_n(x_1, x_2, t)$. Når vi skal bruke rekkeutviklingen i uttrykkene trenger vi de deriverte:

$$\nabla \phi = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n \nabla \phi_n, \quad (4.13a)$$

$$\nabla^2 \phi = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n \nabla^2 \phi_n, \quad (4.13b)$$

$$\phi_y = \sum_{n=0}^{\infty} n(y+1)^{n-1} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n (n+1) \phi_{n+1}, \quad (4.13c)$$

$$\phi_{yy} = \sum_{n=0}^{\infty} n(y+1)^{n-1} (n+1) \phi_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n (n+2)(n+1) \phi_{n+2}. \quad (4.13d)$$

Ligning (4.13b) og (4.13d) brukes i Laplaces ligning (4.8), som da blir

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n \nabla^2 \phi_n + \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n (n+2)(n+1) \phi_{n+2} &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n [\mu^2 \nabla^2 \phi_n + (n+2)(n+1) \phi_{n+2}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Siden y kan ta en vilkårlig verdi mellom $(-1, \epsilon\eta)$ må innholdet i parentesene bli null for alle n . Dette gir en rekursiv relasjon,

$$\phi_{n+2} = -\frac{\mu^2 \nabla^2 \phi_n}{(n+1)(n+2)}. \quad (4.15)$$

Ved å sette 4.13c inn i grensebetingelsen for bunnen (4.11) får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n (n+1) \phi_{n+1} = 0 \quad \text{for } y = -1$$

$$\Rightarrow \phi_1 = 0. \quad (4.16)$$

Den rekursive formelen gir da at potensialet for alle odde n er null,

$$\phi_1 = \phi_3 = \phi_5 = \dots = 0. \quad (4.17)$$

Det totale potensialet kan dermed skrives

$$\phi = -(y+1)^2 \frac{\mu^2}{2!} \nabla^2 \phi_0 - (y+1)^4 \frac{\mu^4}{4!} \nabla^2 \nabla^2 \phi_0 + O(\mu^6). \quad (4.18)$$

Fra den kinematiske betingelsen på overflaten (4.9) får vi:

$$\eta_t = -\nabla \cdot ((1 + \epsilon\eta) \nabla \phi_0) + \frac{\mu^2}{6} \nabla^2 \nabla^2 \phi_0 + O(\mu^4, \epsilon\mu^2). \quad (4.19)$$

Og fra den dynamiske (4.10),

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\mu^2}{2} \nabla^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \eta + \frac{\epsilon}{2} (\nabla \phi_0)^2 = -p_{\text{ytte}} + O(\mu^4, \epsilon\mu^2). \quad (4.20)$$

Vi kan bytte $\nabla \phi_0$ med det vertikal-midlede potensialet $\nabla \bar{\phi}$ ved å bruke

$$\begin{aligned} \nabla \bar{\phi} &= \frac{1}{1 + \epsilon\eta} \int_{-1}^{\epsilon\eta} \nabla \phi dy \\ &= \frac{1}{1 + \epsilon\eta} \int_{-1}^{\epsilon\eta} \left(\nabla \phi_0 - \frac{\mu^2}{2} (y+1)^2 \nabla \nabla^2 \phi_0 + \dots \right) dy \\ &= \nabla \phi_0 - \frac{\mu^2}{6} \nabla \nabla^2 \phi_0 + O(\mu^4, \epsilon\mu^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Denne kan omskrives til

$$\nabla \phi_0 = \nabla \bar{\phi} + \frac{\mu^2}{6} \nabla \nabla^2 \bar{\phi} + O(\mu^4, \epsilon\mu^2), \quad (4.22)$$

og

$$\phi_0 = \bar{\phi} + \frac{\mu^2}{6} \nabla^2 \bar{\phi} + f(t) + O(\mu^4, \epsilon\mu^2). \quad (4.23)$$

$f(t)$ kan trekkes inn i ϕ_0 uten at hastighetspotensialet endres og ϕ_0 kan da skrives

$$\phi_0 = \bar{\phi} + \frac{\mu^2}{6} \nabla^2 \bar{\phi} + O(\mu^4, \epsilon \mu^2). \quad (4.24)$$

Den kinematiske overflatebetingelsen blir dermed

$$\eta_t = -\nabla \cdot ((1 + \epsilon \eta) \nabla \bar{\phi}) + O(\mu^4, \epsilon \mu^2). \quad (4.25)$$

Og den dynamiske,

$$\bar{\phi}_t - \frac{\mu^2}{3} \nabla^2 \bar{\phi}_t = -\left(p_{\text{ytre}} + \eta + \frac{\epsilon}{2} \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \bar{\phi}\right) + O(\mu^4, \epsilon \mu^2). \quad (4.26)$$

Ved å stryke leddene fra orden $\mu^4, \epsilon \mu^2$ får vi Boussinesq-ligningene,

$$\eta_t = -\nabla \cdot ((1 + \epsilon \eta) \nabla \bar{\phi}), \quad (4.27)$$

$$\bar{\phi}_t - \frac{\mu^2}{3} \nabla^2 \bar{\phi}_t = -\left(p_{\text{ytre}} + \eta + \frac{\epsilon}{2} \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \bar{\phi}\right). \quad (4.28)$$

4.1.2 KdV-ligningene

I to dimensjoner og med $\bar{\phi}_x = u$ kan Boussinesqligningene skrives

$$\eta_t = -((1 + \epsilon \eta) u)_x, \quad (4.29)$$

$$u_t - \frac{\mu^2}{3} u_{xxt} = -(p_{\text{ytre}})_x - \eta_x - \frac{\epsilon}{2} (u^2)_x. \quad (4.30)$$

Ved å endre koordinatsystemet slik at det beveger seg med gruntnivåshastigheten vil alle bølger i samme retning som koordinatsystemet endre seg langsomt i tid. Ved å bytte koordinater til

$$\chi = x - t, \quad \tau = \mu^2 t, \quad (4.31)$$

endres Boussinesqligningene i (4.29) og (4.30) til

$$\mu^2 \eta_\tau - \eta_\chi = -u_\chi - \epsilon (\eta u_\chi + u \eta_\chi), \quad (4.32)$$

$$\mu^2 u_\tau - u_\chi - \frac{\mu^2}{3} u_{\chi\chi\chi} = -p_\chi - \eta_\chi - \epsilon \eta \eta_\chi. \quad (4.33)$$

Ligning (4.32) viser at $\eta_\chi = u_\chi$ til ledende orden. Hvis $\eta = u$ et sted i fluidet vil η og u være lik i hele fluidet til ledende orden. Med antakelsen at bevegelsen dør av i uendelig vil dette være tilfellet. Uten å endre nøyaktigheten kan (4.32) brukes til å uttrykke u_χ med η ,

$$u_\chi = \eta_\chi - 2\epsilon \eta \eta_\chi - \mu^2 \eta_\tau. \quad (4.34)$$

Ved å bruke (4.34) i (4.33) elimineres u ,

$$\mu^2 \eta_\tau + \frac{3}{2} \epsilon \eta \eta_\chi + \frac{\mu^2}{6} \eta_{\chi\chi\chi} = -\frac{1}{2} p_\chi. \quad (4.35)$$

Tilbake i koordinatsystemet med x og t får KdV-ligningen formen

$$\eta_t + \left(\frac{3}{2} \epsilon \eta + 1 \right) \eta_x + \frac{\mu^2}{6} \eta_{xxx} = -\frac{1}{2} p_x. \quad (4.36)$$

Ved å bytte η_{xxx} med $-\eta_{xxt}$ blir KdV-ligningen bedre egnet for numerisk løsning uten at nøyaktigheten endres.

Ved å sette $\epsilon = \mu = 1$ blir skaleringen identisk med den som er brukt ellers i oppgaven, og denne brukes derfor videre.

$$\eta_t + \frac{3}{4} (\eta^2)_x + \eta_x - \frac{1}{6} \eta_{xxt} = -\frac{1}{2} p_x. \quad (4.37)$$

4.2 Implementasjon og verifikasjon av KdV-ligningen

4.2.1 Fouriertransformasjon av ligningen

KdV-ligningen kan gjøres om fra en partiell til en ordinær differensialligning ved å fouriertransformere ligningen. Den fouriertransformerte ligningen blir

$$\tilde{\eta}_t + i\gamma \tilde{\eta} = -i\gamma \left(\frac{3}{4} \mathfrak{F} \{ \eta^2 \} + \frac{1}{2} p \right), \quad (4.38)$$

hvor $\tilde{\cdot}$ er brukt som notasjon for fouriertransformasjon, og $\gamma = \frac{k}{1 + \frac{k^2}{6}}$. Ved

å multiplisere med den integrerende faktoren $e^{i\gamma t}$, og innføre variablen $\zeta = \eta e^{i\gamma t}$ får vi

$$\zeta_t = -i\gamma e^{i\gamma t} \left(\frac{3}{4} \mathfrak{F} \{ \eta^2 \} + \frac{1}{2} \tilde{p} \right). \quad (4.39)$$

For å unngå at det ikke-lineære leddet $\mathfrak{F} \{ \eta^2 \}$ fører til aliasing anvendes en nullstilling etter fouriertransformasjon av produkter. Ved nullstilling settes bidragene på den øvre halvdelen av frekvensområdet til 0. Det er skrevet mer om årsaken til aliasing og hvorfor nullstilling fjerner aliasingen i B.

4.2.2 Tidsintegrasjon med Runge-Kutta 4

For å integrere ligningene frem i tid er fjerde ordens Runge Kutta metode brukt [22]. Metoden består av flere steg for hvert tidsskritt, og kan skrives

$$\frac{dG}{dt} = F(G, t),$$

$$a = dtF(G^n, t^n), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} b &= dtF\left(G^n + \frac{a}{2}, t^n + \frac{dt}{2}\right), \\ c &= dtF\left(G^n + \frac{b}{2}, t^n + \frac{dt}{2}\right), \\ d &= dtF(G^n + c, t^n + dt), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} dG &= \frac{1}{6}(a + 2b + 2c + d), \\ G^{n+1} &= G^n + dG. \end{aligned}$$

4.2.3 Lineær verifikasjon

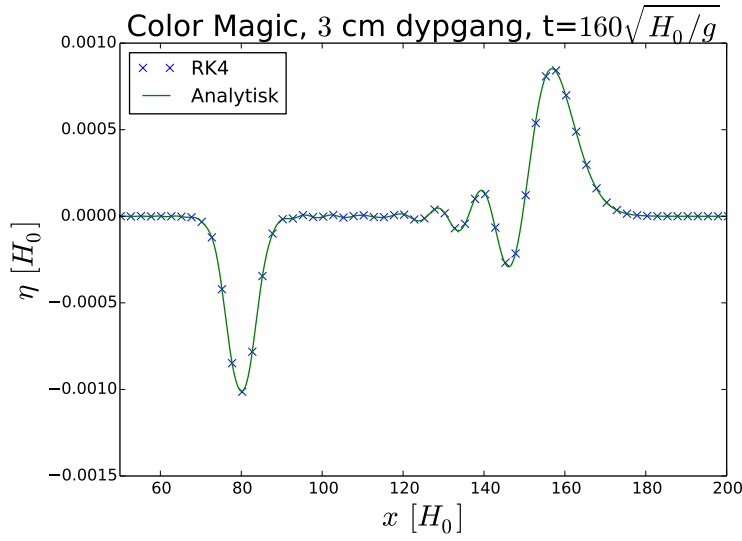
Ved en momentan start fra ro har trykkfordelingen formen $p(x, t) = p(x - Ft)$. Fouriertransformen til p kan da uttrykkes med $\tilde{p}(t = 0)$,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_a &= \int_{-\infty}^{\infty} p_a(x - Ft) e^{-ikx} dx \\ &= e^{-ikFt} \int_{-\infty}^{\infty} p_a(x - Ft) e^{-ik(x-Ft)} d(x - Ft) \\ &= \tilde{p}_a(t_0) e^{-ikFt}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ved å kutte det ikke lineære leddet, $\tilde{\eta}^2$, og bruke trykket ovenfor, kan ligningen integreres direkte.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= e^{-i\gamma t} \left(-i\gamma \tilde{p}_a(t_0) \int_0^t e^{i\gamma t'} e^{-ikFt'} dt' \right) \\ &= e^{-i\gamma t} \left(-i\gamma \tilde{p}_a(t_0) \frac{1}{i(\gamma - kF)} (e^{i(\gamma - kF)t} - 1) \right) \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma - kF} \tilde{p}_a(t_0) (e^{-ikFt} - e^{-i\gamma t}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dette gir en god måte å teste koden på, og figur 4.1 viser η integrert med Runge-Kutta 4 sammen med den analytiske løsnigen. Det ikke-lineære leddet er med i den numeriske løsningen, men siden trykkamplituden er liten blir løsningen dominert av de lineære leddene.



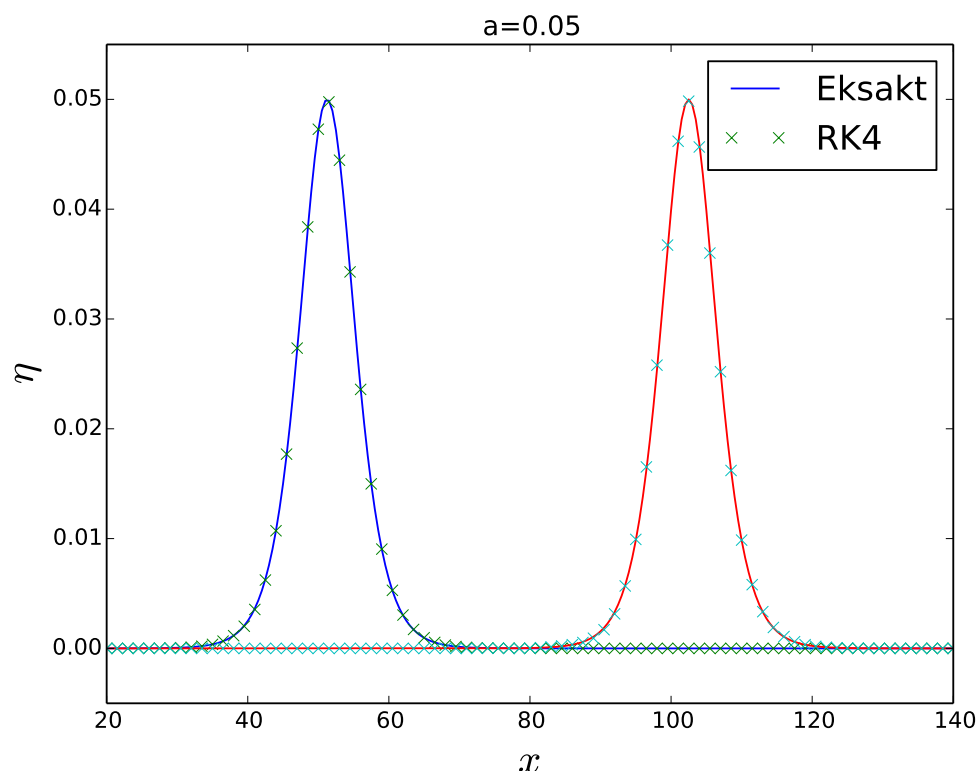
Figur 4.1: Analytisk og numerisk resultat for en svak trykkfordeling

4.2.4 Ikke-lineær verifikasjon med soliton

Som vist i C har den homogene KdV-ligningen en eksakt løsning på formen

$$\eta = \beta \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{3\beta}}{2} (x - Ft) \right), \quad (4.44)$$

hvor $F = 1 + \frac{\beta}{2}$. Denne kan brukes for å verifisere koden hvis trykkfordelingen settes til 0, og den gir en fin test på om det ikke-lineære leddet er implementert riktig. Figur 4.2 viser at den integrerte løsningen stemmer overens med den eksakte. I tillegg til den grafiske sjekken er det også testet om feilen blir mindre når oppløsningen blir bedre. En sammenligning av beregninger med en trykkfordeling og tidligere publiserte resultater er vist i D.



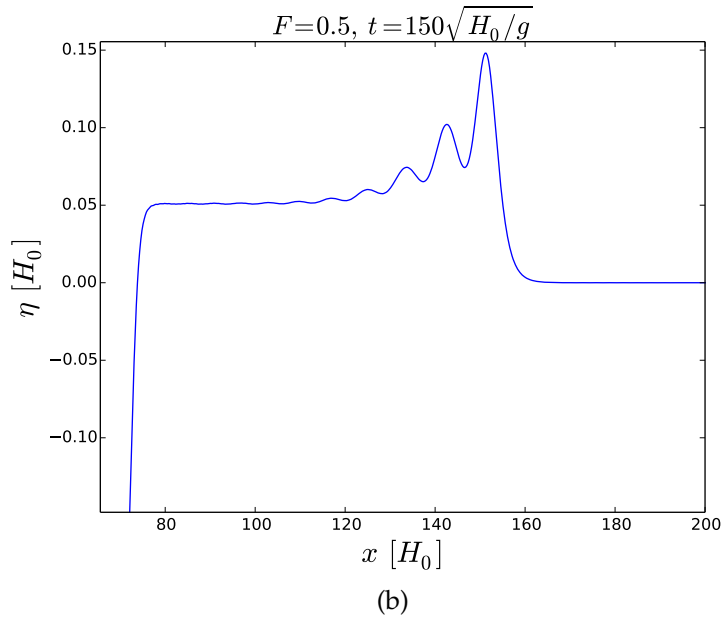
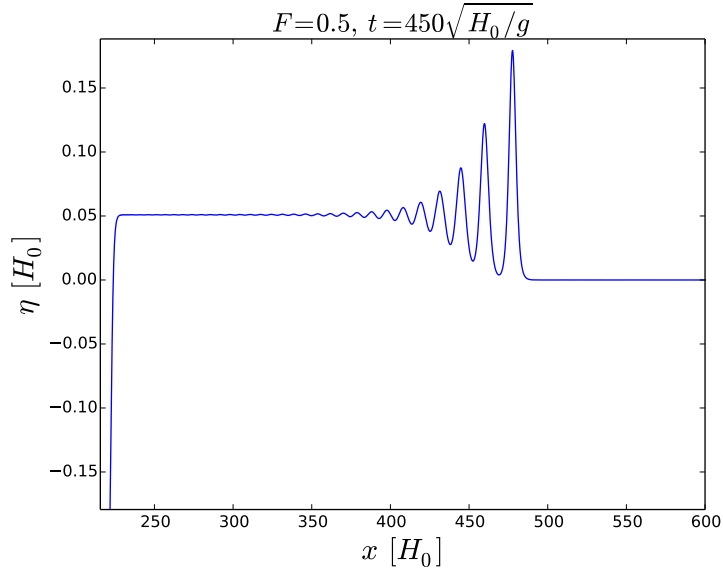
Figur 4.2: Integrert soliton sammen med eksakt løsning for to ulike tidspunkt

4.3 Todimensjonale beregninger med KdV-modellen

Trykkfordelingen definert i (3.1) brukes i KdV-programmet. Simuleringen er gjort med trykkparametrene

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{6.6m}{H_0}, & l_1 &= \frac{224m}{H_0}, & H_0 &= 30m, \\ \alpha &= 0.6, & F &= 0.5. \end{aligned} \quad (4.45)$$

og oppstartstiden $t_0 = 20$. Løsingen etter $t/\sqrt{H_0/g} = 450$ er vist i figur 4.3a, og η foran forstyrrelsen har form som en bølgende heving. Mekanismene bak dette fenomenet er beskrevet nærmere i E. Den ledende bølgen har en høyde på omtrent 4.5 m, og høyden har økt fra $t/\sqrt{H_0/g} = 150$, vist i figur 4.3b. At vi ser en flat heving bak den ledende bølgen, og ingen ny bølgegenerering, viser at den ledende bølgen er forårsaket av oppstarten. Det dannes ikke noen ny bølge foran trykkfordelingen som kan sendes ut oppstrøms. Beregninger med KdV-ligningen med flat bunn kan derfor ikke brukes til å undersøke fenomenet observert ved Askholmene.



Figur 4.3: Bølgen foran trykkfordelingen

4.4 Implementasjon av de todimensjonale Boussinesqligningene

De todimensjonale Boussinesqligningene (4.29) og (4.30) med skaleringen hvor $\epsilon = \mu = 1$ er løst numerisk ved å bruke endelig differanse. Følgende diskretiseringen er brukt

$$[D_t \eta = -D_x((1 + \bar{\eta}^{xt})u)]_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (4.46)$$

$$[D_t(u - \frac{1}{3}D_x D_x u) = -D_x \eta - (D_x \bar{u}^{(2*)})^x + f(x, t)]_i^n. \quad (4.47)$$

Sentrerte operatorer for derivasjon anvendes både i tid og rom,

$$D_x g_i^n = \left[\frac{g_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right]^n. \quad (4.48)$$

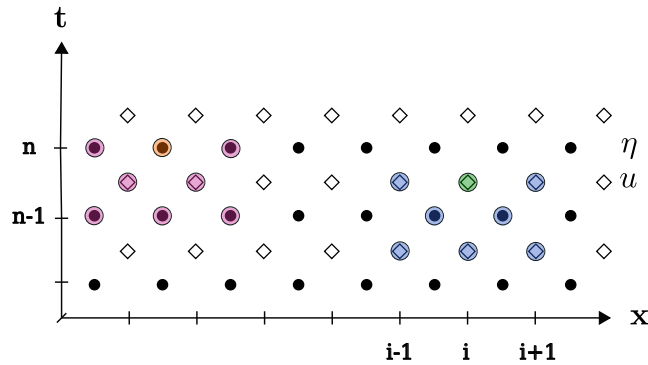
Et aritmetisk middel er brukt på noen av leddene,

$$\bar{g}_i^n = \left[\frac{g_{i+\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right]^n. \quad (4.49)$$

Det ikke-lineære leddet lineariseres ved å anvende en geometrisk midling,

$$[g^{(2*)}]^n = g^{n+\frac{1}{2}} g^{n-\frac{1}{2}}. \quad (4.50)$$

Ved å bruke operatorene slik de er definert over finner man, etter å ha skrevet ut ligningen, at η evalueres i de romlige punktene $i \pm \frac{1}{2}$ mens u evalueres i i . For diskretiseringen i tid har vi tilsvarende, at η er definert i n , mens u er definert i $n \pm \frac{1}{2}$. Vi kan derfor bruke det vi kaller for et forskjøvet grid, hvor η og u ikke prøves i samme punkter.



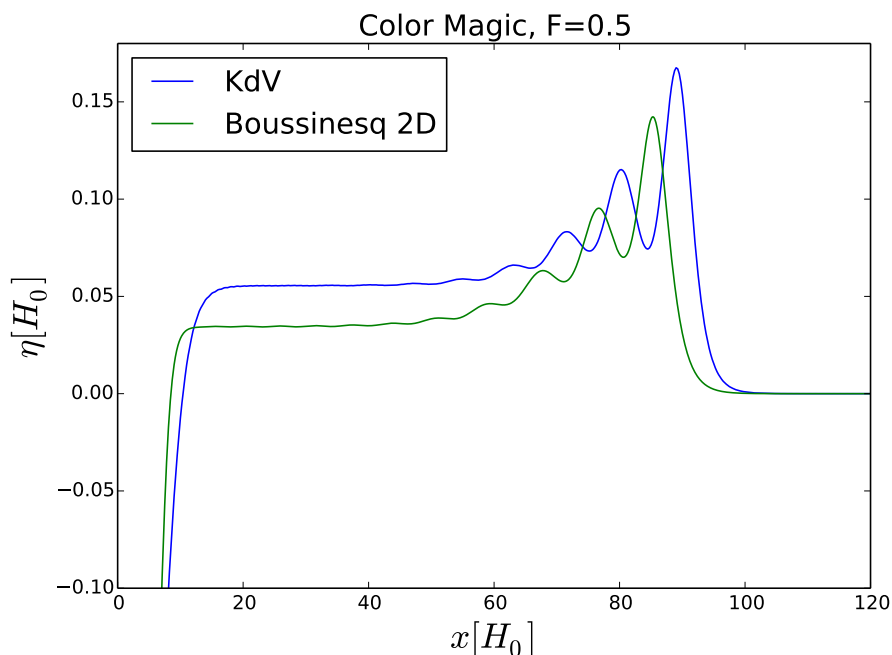
Figur 4.4: Forskjøvet grid. Sjablongen for u er farget blå, og sjablongen for η er rosa.

Både (4.46) og (4.47) gir tridiagonale ligningssystemer som løses hvert tidssteg.

4.5 Todimensjonale beregninger med Boussinesqmodellen

Siden beregninger med KdV-ligningen ikke gir en ny oppstrøms bølge etter oppstartsbølgen undersøkes samme problem med todimensjonale Boussinesqligninger. Figur 4.5 viser hevingen beregnet med KdV sammen med

tilsvarende beregning gjort med den todimensjonale Boussinesqmodellen. Figuren viser at todimensjonale Boussinesqligninger gir en litt svakere effekt oppstrøms, men den flate hevingen foran trykkfordelingen som vi så i KdV-beregningene er også tydelig her. Heller ikke med todimensjonale Boussinesqligninger for flat bunn produserer den virkningen oppstrøms vi ønsker å undersøke.



Figur 4.5: Bølgene som beveger seg oppstrøms foran MS Color Magic

4.6 Implementasjon av de tredimensjonale Boussinesqligningene

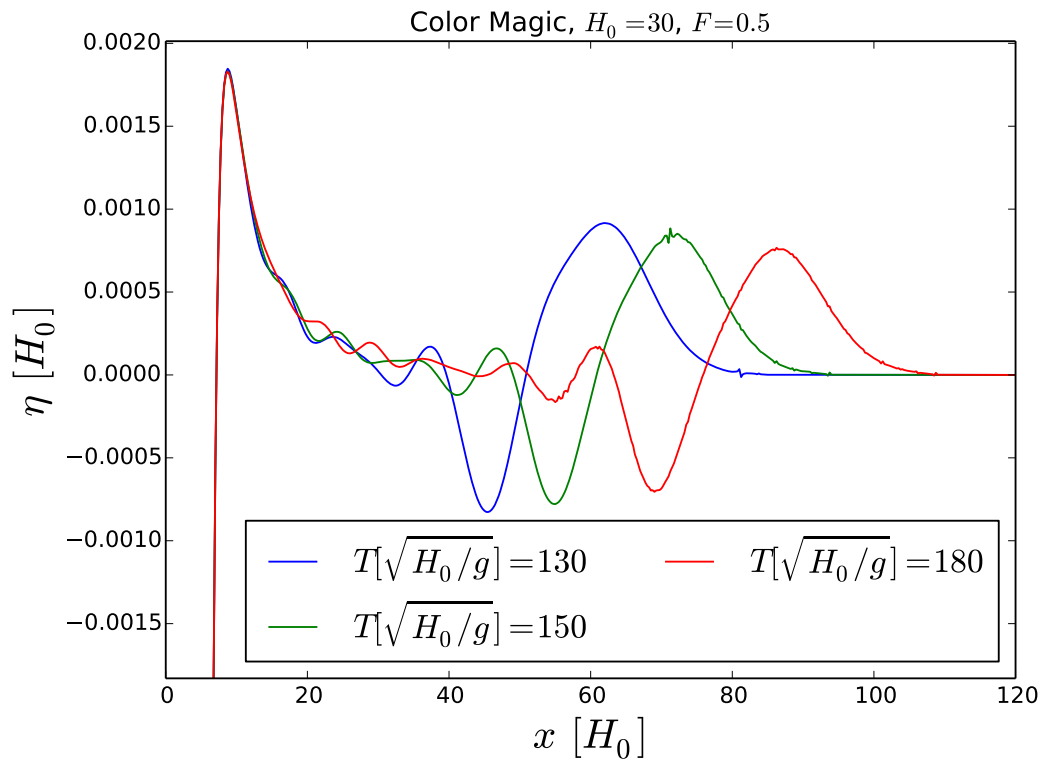
Programmet som løser de tredimensjonale Boussinesqligningene er skrevet av G.K. Pedersen. Det er basert på samme diskretisering som det todimensjonale programmet, men løses for ϕ og ikke u . Visse endringer er gjort for å kunne utføre de ønskede beregningene. Programmet ble opprinnelig laget for å gjøre beregninger på oppstrøms effekter når forstyrrelsen beveger seg raskere enn gruntnavnshastigheten, og en effekten av en momentan start påvirket derfor ikke beregningen. For å gjøre beregninger hvor hastigheten til trykkfordelingen er lavere enn den kritiske hastigheten brukes oppstarten beskrevet i 3.5. Trykkfordelingen ble også byttet til fordelingen beskrevet i delkapittel 3.2

4.7 Tredimensjonale beregninger med Boussinesq-modellen

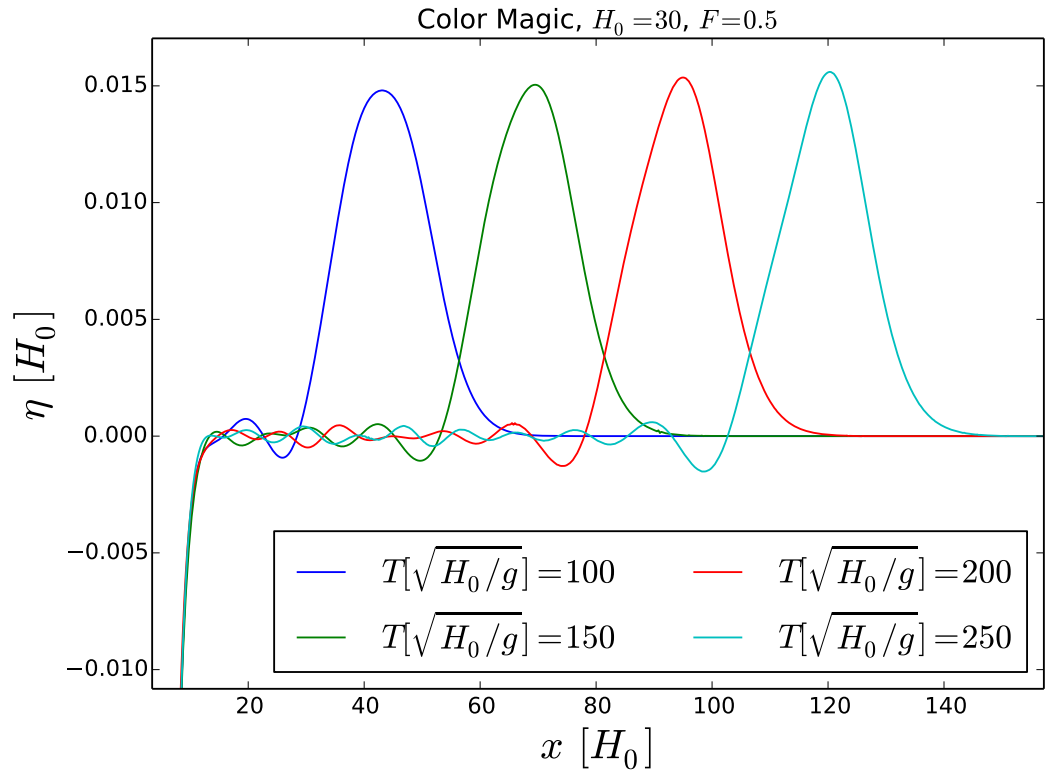
I trykkfordelingen brukes samme longitudinale parametre som i de todimensjonale beregningene (4.45), og følgende parametre lateralt

$$l_2 = \frac{35m}{H_0}, \quad \beta = 1.5. \quad (4.51)$$

Ettersom $H_0 = 30$ bryter vi langbølgeantakelsen ved å bruke en trykkfordeling med bredden satt ovenfor. Dette trenger ikke å få store konsekvenser for resultatene, men er viktig å vite likevel. Beregningen er gjort med et ubegrenset domene, og bølgen som beveger seg oppstrøms er som forventet mye lavere enn de todimensjonale beregningene viser. Hevningen foran trykket er vist i figur 4.6, og i likhet med de todimensjonale beregningen blir det ikke generert en ny bølge foran forstyrrelsen som kan sendes ut oppstrøms. Figur 4.7 viser samme trykkfordeling med samme hastighet, men i en kanal på 500 m. Også i dette tilfellet er bølgen som løper fra knyttet til oppstarten, og det bygges ikke opp en ny bølge etter at oppstartsbølgen har løpt fra. Siden bølgefenomenet på Askholmene ikke kan forklares med en bølge fra oppstarten går vi over til en modell uten samme begrensninger som Boussinesq. Alternativet ville vært å bruke Boussinesq med en variabel bunn, for å se om en overgang til grunnere vann kan utløse en bølgeutsending. Årsaken til at dette ikke gjøres er at modellen som presenteres i det neste kapitlet er fullt dispersiv og numerisk mer effektiv.



Figur 4.6: Bølgene som beveger seg oppstrøms foran MS Color Magic på åpent hav



Figur 4.7: Bølgene som beveger seg oppstrøms foran MS Color Magic i kanal på 500 m

Kapittel 5

En lineær og fullt dispersiv modell

5.1 Utledning av metoden

Denne metoden ble introdusert av D. Clamond og J. Grue [7], og er beskrevet som en rask metode for fullt ikke-lineære beregninger. Metoden ble først utledet for flat bunn i to og tre dimensjoner. Utvidelsen til variabel bunntopografi ble beskrevet av D. Fructus og J. Grue [14], og J. Grue [16]. En lineær versjon av modellen utledes her fordi resultatene fra Boussinesq er i det lineære regime. Det er også enkelt å kontrollere om lineær teori fortsetter å være en god tilnærming. Lineære transformasjoner for bevegelige trykkfordelinger er gitt i Wehausen og Laitone [32], men disse er av relativt komplisert matematisk utforming og er gyldig for konstant dyp og ubegrenset domene. Disse er derfor ikke anvendelige for dette problemet.

5.1.1 Potensialet definert på overflaten og bunnen

Vi bruker de lineære leddene fra ligningene i delkapitlet 2.3. Bunnen skrives $H(x) = \delta(x) - 1$, slik det er beskrevet i delkapittel 3.4, og ligningene får da følgende form

$$\text{grad}^2 \phi = 0 \quad \text{for } -H < y < \eta, \quad (5.1)$$

$$\phi_t = -(\eta + p_{\text{ytte}}) \quad \text{for } y = \eta, \quad (5.2)$$

$$\eta_t = \phi_y \quad \text{for } y = \eta, \quad (5.3)$$

$$\phi_y = -\text{grad} \phi \cdot \text{grad} \delta \quad \text{for } y = -H. \quad (5.4)$$

Disse ligningene kan skrives om slik at avhengigheten av den vertikale koordinaten, y , forsvinner. Vi definerer de nye potensialene Φ_S og Φ_B , hvor Φ_S er potensialet på overflaten, mens Φ_B er potensialet på bunnen.

$$\Phi_S(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, y = \eta(\mathbf{x}, t), t), \quad (5.5)$$

$$\Phi_B(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, y = -H(\mathbf{x}, t), t). \quad (5.6)$$

Lineært er gradienten og den tidsderiverte av ϕ og Φ_S lik,

$$\nabla \phi = \nabla \Phi_S, \quad (5.7)$$

$$\phi_t = \Phi_{St}. \quad (5.8)$$

Den dynamiske overflatebetingelsen (5.2) blir da

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = -\eta - p. \quad (5.9)$$

Variabelen V innføres i den kinematiske overflatebetingelsen (5.3)

$$\eta_t = [\phi_y]_{y=\eta} = V_S. \quad (5.10)$$

Sammen utgjør 5.10 og 5.9 et sett koblede differensialligninger som ikke er avhengig av den vertikale koordinaten.

5.1.2 Greenfunksjonen og Fouriertransform

For å løse de koblede ligningene (5.10) og (5.9) er det nødvendig å finne et uttrykk for V . Jakten på dette uttrykket starter ved å bruke Greens teorem. Hastighetspotensialet til fluidet, ϕ , oppfyller Laplaces ligning i hele fluidet, mens et annet potensial, ψ , er en kilde og tilfredstiller derfor Laplaces ligning i hele fluidet utenom det singulære kildepunktet (\mathbf{x}, y) . Newman viser i "Marine Hydrodynamics"[27] at følgende relasjon gjelder

$$\int_{\partial\Omega'} \left[\phi' \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi'}{\partial n'} \right] dA' = -\alpha \phi(\mathbf{x}, y). \quad (5.11)$$

α er 2π når punktet ligger på $\partial\Omega$ og 4π når punktet ligger i Ω . $\partial\Omega$ er overflaten som omgir fluidet, og kan i vårt tilfelle deles inn i den frie overflaten S , bunnen B og en sylinder som kobler de to sammen i $|\mathbf{x}| = \infty$. Ved å kreve at potensialene dør av i uendelig får man bare bidrag fra S og B . En kilde med kildepunkt utenfor Ω kan legges til i ψ slik at ψ blir summen av to kilder. Når (\mathbf{x}, y) ligger på S er den første kilden plassert i (\mathbf{x}, y) og den andre kilden i $(\mathbf{x}, y + 2H_0)$. Den andre kilden er da en speiling av den første kilden om bunnen. Når (\mathbf{x}, y) er på B er den første kilden i (\mathbf{x}, y) , mens den andre kilden i $(\mathbf{x}, -y)$, altså en speilingen om $y = 0$. Greenfunksjonen for de to tilfellene blir

$$\int_{S'+B'} \left[\phi' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial n'} \right] dA' = -2\pi \Phi_S, \quad (5.12)$$

og

$$\int_{S'+B'} \left[\phi' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial n'} \right] dA' = -2\pi \Phi_B. \quad (5.13)$$

hvor

$$R^2 = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2, \quad (5.14)$$

$$r^2 = R^2 + (y' - y)^2, \quad (5.15)$$

$$r_1^2 = R^2 + (y' + y + 2H_0)^2, \quad (5.16)$$

$$r_{1B}^2 = R^2 + (y' + y)^2. \quad (5.17)$$

Lineært er flateelementet dA på overflaten uavhengig av det vertikale koordinatet, mens δ inngår i flateelementet på bunnen.

$$[dA]_B = \sqrt{1 + |\nabla\delta|^2} dx'_1 dx'_2, \quad [dA]_S = dx'_1 dx'_2 \quad (5.18)$$

I integralet over S inngår $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, som lineært er lik ϕ_y . ϕ_y byttes med V_S (5.10), og siden bunnen er stasjonær er $\frac{\partial\phi}{\partial n} \sqrt{1 + |\nabla'\delta'|^2} = 0$ på B . Ved å anvende disse relasjonene blir integralene (5.12) og (5.13)

$$\begin{aligned} & \int_{S'} \Phi_S \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right)_{(\mathbf{x},y) \in S} dx'_1 dx'_2 - \int_{S'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right)_{(\mathbf{x},y) \in S} V'_S dx'_1 dx'_2 \\ &= -2\pi\Phi_S - \int_{B'} \Phi'_B \sqrt{1 + |\nabla'\delta'|^2} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right)_{(\mathbf{x},y) \in S} dx'_1 dx'_2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

og

$$\begin{aligned} & \int_{S'} \Phi_S \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right)_{(\mathbf{x},y) \in B} dx'_1 dx'_2 - \int_{S'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right)_{(\mathbf{x},y) \in B} V' dx'_1 dx'_2 \\ &= -2\pi\Phi_B - \int_{B'} \Phi'_B \sqrt{1 + |\nabla'\delta'|^2} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right)_{(\mathbf{x},y) \in B} dx'_1 dx'_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Leddene med ψ kan uttrykkes ved en rekkeutvikling om η og δ . Siden disse skal multipliseres med Φ_S , Φ_B eller V er det tilstrekkelig å ta med leddene opp til $O(\eta)$. Det antas at δ er så liten at det er tilstrekkelig å ta med kvadratiske ledd med δ . Utrekningene er vist i A.1, og resultatene er

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@S \\ (\mathbf{x}', y')@S}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \mathfrak{R}_1, \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@B \\ (\mathbf{x}', y')@S}} = \frac{2}{R_0} - 2\delta \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{1}{R_0}\right) + \mathfrak{R}_2, \quad (5.22)$$

$$\left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla'\right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@S \\ (\mathbf{x}', y')@B}} = 2\nabla' \cdot \left(\delta' \nabla' \frac{1}{R_0}\right) + \mathfrak{R}_3, \quad (5.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@S \\ (\mathbf{x}', y')@S}} = \frac{\partial}{\partial(2h_0)} \frac{1}{R_1} + \mathfrak{R}_4, \quad (5.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@B \\ (\mathbf{x}', y')@S}} = 0, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} &\left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla'\right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}}\right)\right)_{\substack{(\mathbf{x}, y)@B \\ (\mathbf{x}', y')@B}} \\ &= \frac{\partial}{\partial(2h_0)} \frac{1}{R_1} + \nabla' \cdot \left((\delta' - \delta) \nabla' \frac{1}{R_0}\right) + \nabla' \cdot \left((\delta' + \delta) \nabla' \frac{1}{R_0}\right) \\ &+ \mathfrak{R}_6. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dekomposisjonen $V = V_S^{(1)} + V_S^{(2)}$ introduseres hvor $V_S^{(1)}$ er den lineære delen, mens $V_S^{(2)}$ inneholder kvadratiske ledd med δ . Ved å bruke (5.21), (5.23) og (5.24) gir (5.19) følgende integralligninger for $V_S^{(1)}$ og $V_S^{(2)}$

$$\int_{S'} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) V_S^{(1)'} d\mathbf{x}' = 2\pi\Phi_s + \int_{S'} \Phi_s' \frac{\partial}{\partial 2h_0} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}' \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{S'} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) V_S^{(2)} d\mathbf{x}' &= 2 \int_{B'} \Phi_B'^1 \nabla' \cdot \left(\delta' \nabla' \frac{1}{R_0}\right) d\mathbf{x}', \\ &= -2 \int_{B'} \delta' \nabla' \Phi_B'^1 \cdot \left(\nabla' \frac{1}{R_0}\right) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.28)$$

I omskrivingen av det siste integralet er delvis integrasjon benyttet.

Φ_B dekomponeres også til $\Phi_B = \Phi_B^{(1)} + \Phi_B^{(2)}$, hvor $\Phi_B^{(1)}$ er lineær i δ og η , mens $\Phi_B^{(2)}$ inneholder de kvadratiske leddene med δ . I integrallikningen (5.28) inngår Φ_B i et ledd multiplisert med δ , og det er derfor kun nødvendig å finne $\Phi_B^{(1)}$. De lineære leddene i (5.20) gir følgende ligningen for $\Phi_B^{(1)}$

$$2\pi\phi_B^{(1)} = \int_{S'} \frac{2}{R_0} V_S^{(1)'} d\mathbf{x}' - \int_{B'} \Phi_B^{(1)'} \frac{\partial}{\partial(2H_0)} \frac{1}{R_1} d\mathbf{x}'. \quad (5.29)$$

Man kan løse ligningene for $V_S^{(1)}$ og $V_S^{(2)}$ ved å bruke fouriertransformasjon. En felles formel for den fouriertransformerte av $\frac{1}{R_1}$ og $\frac{1}{R_2}$ er derfor nyttig. Ved å ta en tur innom kompleks analyse kan $\frac{1}{R_i}$ skrives

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + iR \cos(\theta)} d\theta. \quad (5.30)$$

Dette er vist i detalj i (A.19)-(A.22).
Integranden skrives videre om til

$$\frac{1}{a + iR \cos(\theta)} = \int_0^\infty e^{-k(a + iR \cos(\theta))} dk. \quad (5.31)$$

Dette gir

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-k(a + iR \cos(\theta))} dk d\theta = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \right\}, \quad (5.32)$$

hvor steg for steg utregning er beskrevet i (A.25)-(A.26).

Med denne formen er det lett å finne den fouriertransformerte til $\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{R_a}$,

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{R_a} \right\} = \frac{2\pi(-k)^n}{k} e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}. \quad (5.33)$$

Siden (5.32) ikke er gyldig for $a = 0$ må en annen fremgangsmåte benyttes for å finne fouriertransformasjonen til $\frac{1}{R}$, denne er vist i A.3 og resultatet blir

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{R} \right\} = \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (5.34)$$

Dette brukes når (5.27) fouriertransformeres og løses for $\mathfrak{F} \left\{ V_S^{(1)} \right\}$

$$\int_\Omega \int_{S'} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) V_S^{(1)'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} = 2\pi \mathfrak{F} \left\{ \Phi_s \right\} + \int_\Omega \int_{S'} \Phi_s' \frac{\partial}{\partial(2H_0)} \frac{1}{R_1} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \quad (5.35)$$

hvor $\int_{S'} [\cdot] d\mathbf{x}' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\cdot] dx'_1 dx'_2$ og tilsvarende for integralet over Ω .

$$\int_{S'} V_s^{(1)'} \left(\mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{R} \right\} + \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{R_1} \right\} \right) d\mathbf{x}' = 2\pi \mathfrak{F} \{ \Phi_s \} + \int_{S'} \Phi_s' \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial(2H_0)} \frac{1}{R_1} \right\} d\mathbf{x}', \quad (5.36)$$

$$\frac{2\pi}{k} \left(1 + e^{-2kH_0} \right) \int_{S'} V_s^{(1)'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}' = 2\pi \mathfrak{F} \{ \Phi_s \} - 2\pi e^{-2kH_0} \int_{S'} \Phi_s' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}', \quad (5.37)$$

$$\mathfrak{F} \left\{ V_s^{(1)} \right\} = k \tanh(kH_0) \mathfrak{F} \{ \Phi_s \}. \quad (5.38)$$

Integralligningen for $V_s^{(2)}$ (5.28) fouriertransformeres også, og gir

$$\mathfrak{F} \left\{ V_s^{(2)} \right\} = \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathfrak{F} \left\{ \delta \nabla \Phi_B^{(1)} \right\}}{\cosh(kH_0)}. \quad (5.39)$$

Detaljene av fouriertransformasjonen av høyresiden i (5.28) er gitt i (A.31)

Ligning (5.29) gir følgende uttrykk for $\mathfrak{F} \left\{ \Phi_B^{(1)} \right\}$

$$\mathfrak{F} \left\{ \Phi_B^{(1)} \right\} = \frac{\mathfrak{F} \left\{ \Phi_s^{(1)} \right\}}{\cosh(kH_0)}, \quad (5.40)$$

hvor (5.38) er brukt.

5.2 Matriseformulering

Siden disse uttrykkene for $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ og $\Phi_B^{(1)}$ bruker fouriertransformerte brukes fouriertransform også på ligningene for overflatebetingelsene (5.9) og (5.10)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \{ \eta_t \} &= \mathfrak{F} \left\{ V_s^{(1)} \right\} + \mathfrak{F} \left\{ V_s^{(2)} \right\} \\ &= k \tanh(kH_0) \mathfrak{F} \{ \Phi_s \} + \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathfrak{F} \left\{ \delta \nabla \Phi_B^{(1)} \right\}}{\cosh(kH_0)}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\mathfrak{F} \{ \Phi_{st} \} = -\mathfrak{F} \{ p \} - \mathfrak{F} \{ \eta \}. \quad (5.42)$$

Ved å bruke at den skalerte vinkelfrekvensen er $\omega = \sqrt{k \tanh(kH_0)}$ kan det koblede ligningssystemet skrives

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \omega \tilde{\Phi}_s \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \omega \tilde{\Phi}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_s^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

hvor $(\tilde{\cdot})$ er brukt for $\mathfrak{F}\{\cdot\}$.

For å forenkle notasjonen defineres

$$\Theta = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \omega \tilde{\Phi}_S \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

$$N = \begin{pmatrix} \tilde{V}_S^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \tilde{p} \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Med de nye variablene kan (5.43) skrives

$$\Theta_t + M\Theta = N + R. \quad (5.48)$$

Multiplikasjon med den integrerende faktoren gir

$$\frac{d}{dt} (e^{Mt} \Theta) = e^{Mt} (N + R), \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

hvor e^{Mt} er

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Den fulle utregningen av e^{Mt} er gitt i (A.32)-(A.33).

Vi innfører $G = e^{Mt} \Theta$, slik at

$$\frac{dG}{dt} = e^{Mt} (N + R) \quad (5.52)$$

Ved beregning av det ikke-lineære leddet $\tilde{V}_S^{(2)}$ kan aliasing oppstå. For å unngå dette er nullfylling og 4-halve regelen slik det er beskrevet i D. Clamond og J. Grue [7] og D. Fructus m.fl. [13] anvendt. Fenomenet aliasing er beskrevet nærmere i B. For å integrere ligningene frem i tid er fjerdeordens Runge Kutta brukt. Den ble også brukt for tidsintegrasjon av KdV-ligningen, og er derfor presentert i avsnitt 4.2.2. Fouriertransformasjon utføres numerisk med en FFT-rutine. FFT står for "fast Fourier transform" og er en metode for å beregne diskret Fouriertransformasjoner. En FFT transformasjon bruker $N \log N$ beregninger, hvor N er lengden til signalet som skal transformeres. Det er bruken av Fouriertransformasjoner og beregningen av dem med FFT som er årsaken til at metoden som er presentert kan beskrives som en rask metode. Modeller basert på endelig differanse bruker gjerne N^2 beregninger per tidskritt. For store beregningsområder er forskjellen mellom $N \log N$ og N^2 beregninger stor.

5.3 Verifikasjon

5.3.1 Sammenligning med analytisk løsning

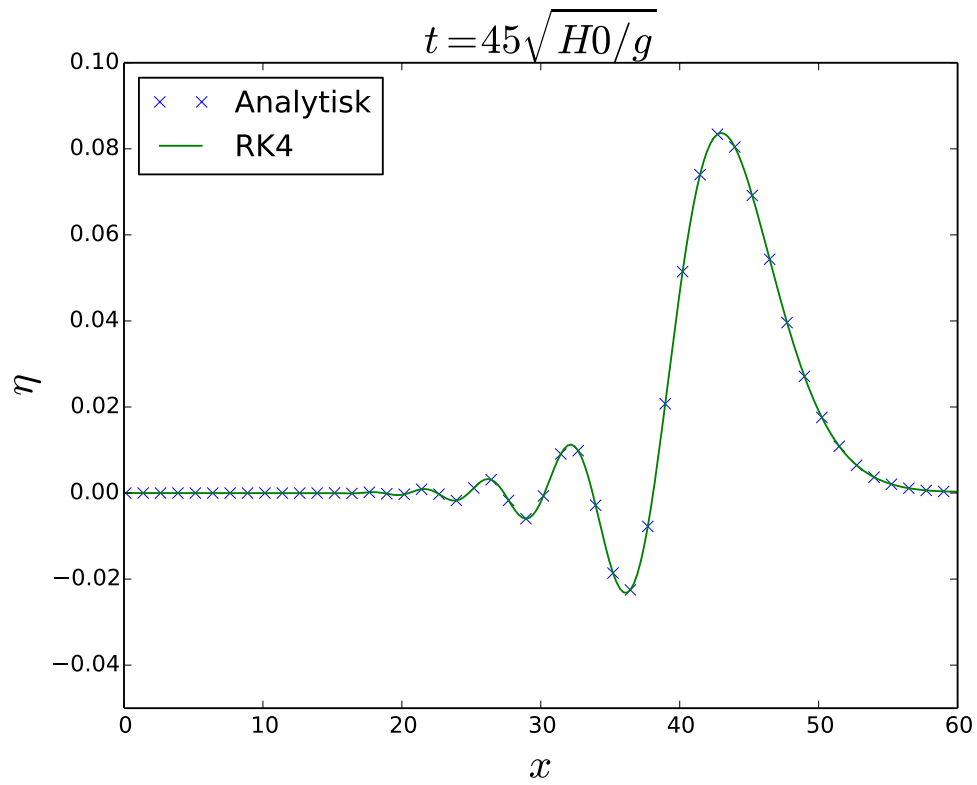
Med flat bunn, ingen ytre trykkfelt, og ingen ikke-lineære ledd kan differensialligningen for G (5.52) løses analytisk,

$$\begin{aligned} G &= \text{constant} = (G)_{t=0} = (\Theta)_{t=0}, \\ \Theta &= e^{-Mt} G_0 = e^{-Mt} \Theta_0, \\ \Rightarrow \tilde{\eta} &= \tilde{\eta}_0 \cos(\omega t) + \omega \tilde{\Phi}_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \tag{5.53}$$

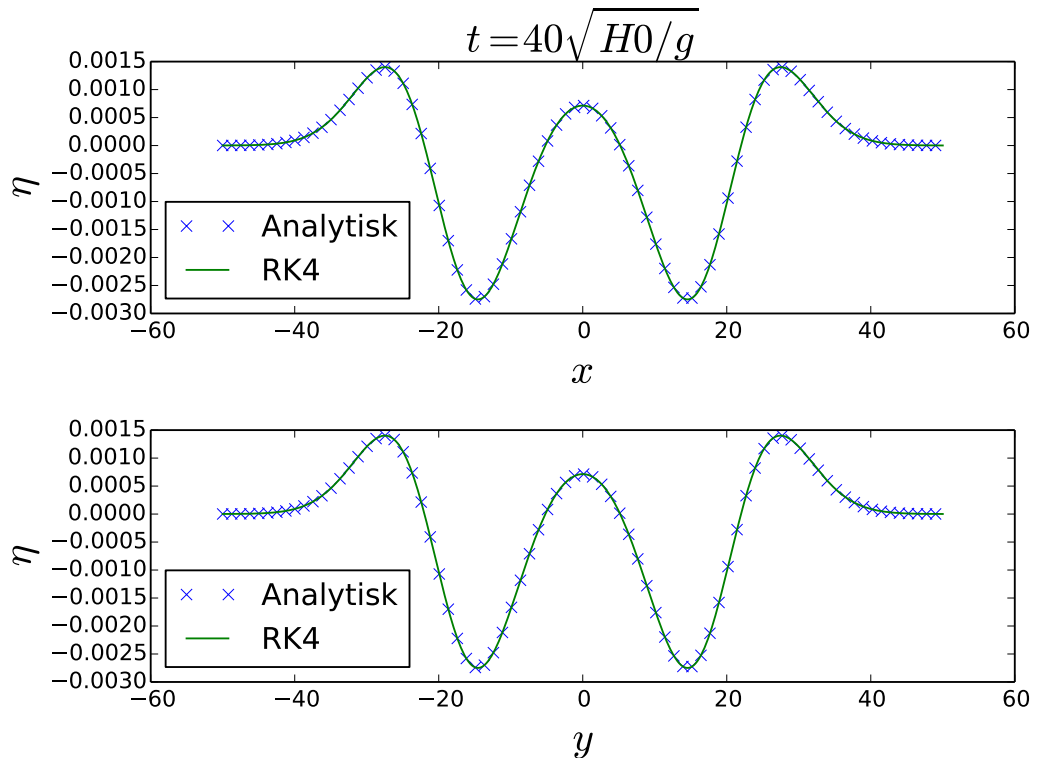
Hvis startbetingelsen er en statisk heving blir Φ_0 null, og uttrykket forenkles ytterligere, slik at

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 \cos(\omega t) \tag{5.54}$$

Denne brukes for å verifisere at tidsintegreringen med Runge-Kutta 4 er implementert riktig. Simuleringen i figur 5.1 er satt i gang med et soliton uten x_2 -avhengighet som startbetingelse, og beregningen er derfor todimensjonal. For å sjekke de tredimensjonale beregningene er en gaussisk funksjon som er lik i x_1 - og x_2 - retning brukt som startbetingelse. Resultatet i figur 5.2 viser snitt i begge retninger. Plottene i figur 5.1 og 5.2 gir grunn til å tro at metoden er implementert riktig, men siden grafiske fremstillinger ikke alltid viser hele sannheten, sjekkes det også numerisk om feilen blir mindre ved finere oppløsning.



Figur 5.1: Todimensjonal beregning. Runge-Kutta 4 integrasjon sammen med analytisk løsning

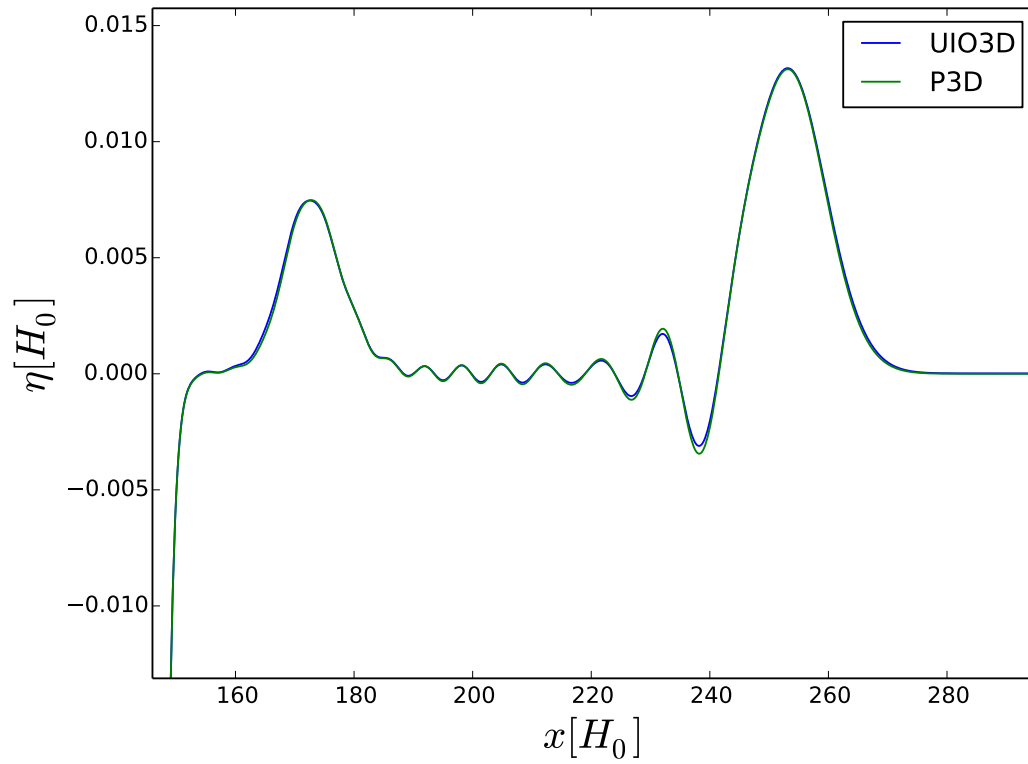


Figur 5.2: Tredimensjonal beregning. Runge-Kutta 4 integrasjon sammen med analytisk løsning. Øverst vises snittet ved $y = 0$, og nederst snittet ved $x = 0$

5.3.2 Sammenligning av to koder

For å utforske parameterområdet er det nødvendig med mange simuleringer, og domenet må være stort for å få med den ønskede tidsutviklingen. I de fleste beregningene ble et program kalt UIO3D som er skrevet i språket Fortran 90 brukt. Dette fordi Fortran 90 er et språk regner raskt.

For å få oversikt over, og innsikt i, det numeriske implementerte jeg metoden selv. Programmet ble skrevet i språket Python og er listet i F. Dette programmet regner saktere, men i tillegg til læringsutbytte gir den en god kontroll på at Fortran 90 programmet gir riktige resultater. Figur 5.3 viser bølgen oppstrøms når en trykkfordeling som svarer til Color Magic er brukt. Her ser vi at de to metodene gir resultat som stemmer overens. Den lille forskjellen vi ser kan skyldes ulik presisjon i representasjonen av flyttall.



Figur 5.3: Sammenligning av programmet skrevet i fortran 90 og programmet skrevet i Python

Kapittel 6

Resultater fra den lineære og fullt dispersive modellen

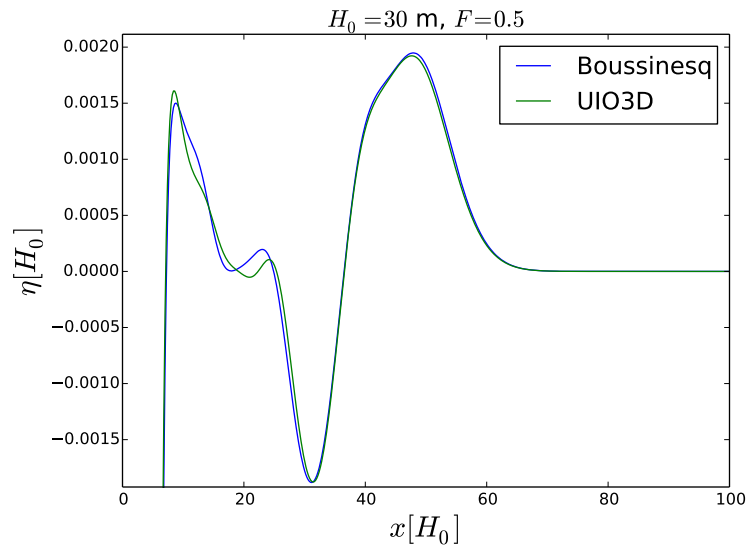
6.1 Flat bunn

Trykkfordelingen som er anvendt i langbølgemodellene er også brukt her, og trykket er derfor brukt med følgende parametre

$$\begin{aligned} H_0 &= 30, & l_1 &= \frac{224}{H_0}, & l_2 &= \frac{35}{H_0}, \\ P_m &= \frac{6.6m}{H_0}, & \alpha &= 0.6, & \beta &= 1.5 \end{aligned} \quad (6.1)$$

6.1.1 Sammenligning med Boussinesq

Figur 6.1 viser η foran forstyrrelsen beregnet med Boussinesqligningen, og den lineære og fullt dispersive modellen. Beregningene er gjort med ubegrenset utstrekning med samme oppløsning, og vi ser at den ledende bølgen blir tilnærmet lik i de to modellene.

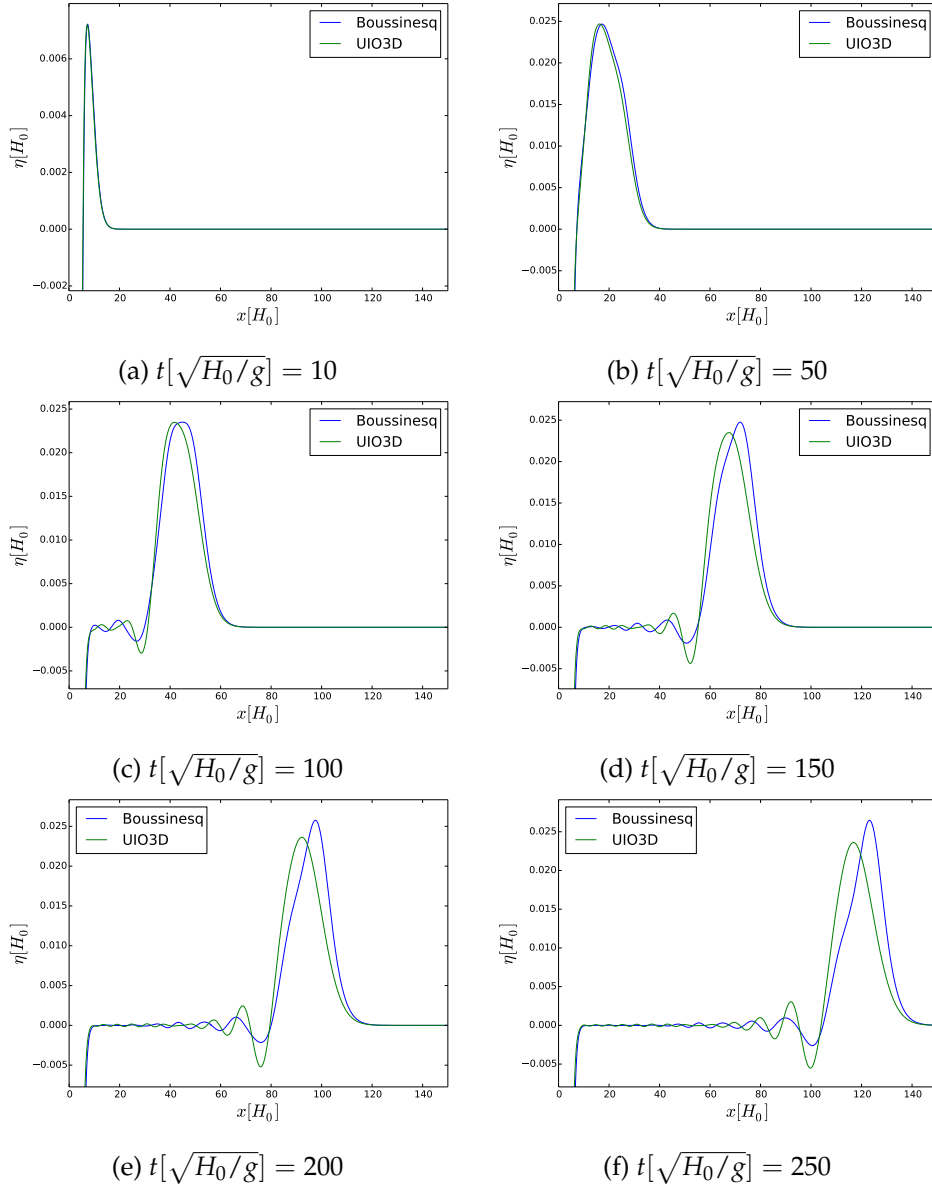


Figur 6.1: Sammenligning av bølgen foran trykkfordelingen ved bruk av Boussinesqmodellen og UIO3D. Oppløsningen er $dx_1 = 0.2$, $dx_2 = 0.1$ og $dt = 0.1$

6.1.2 Kanalbredde på 200m

Ved å sammenligne beregninger gjort for en kanal på 200 m ser vi at effekten av dispersivitet og ikke-linearitet øker med tiden. Boussinesqligningene er svakt dispersive og svakt ikke-lineære, mens UIO3D er lineær og fullt dispersiv. At resultatene samsvarer så godt forteller oss at begge modellene kan benyttes for dette problemet. Fra figur 6.2d, 6.2e og 6.2f kommer det tydelig frem at heller ikke den lineære og fullt dispersive metoden gir en ny fraløpende bølge etter oppstarten.

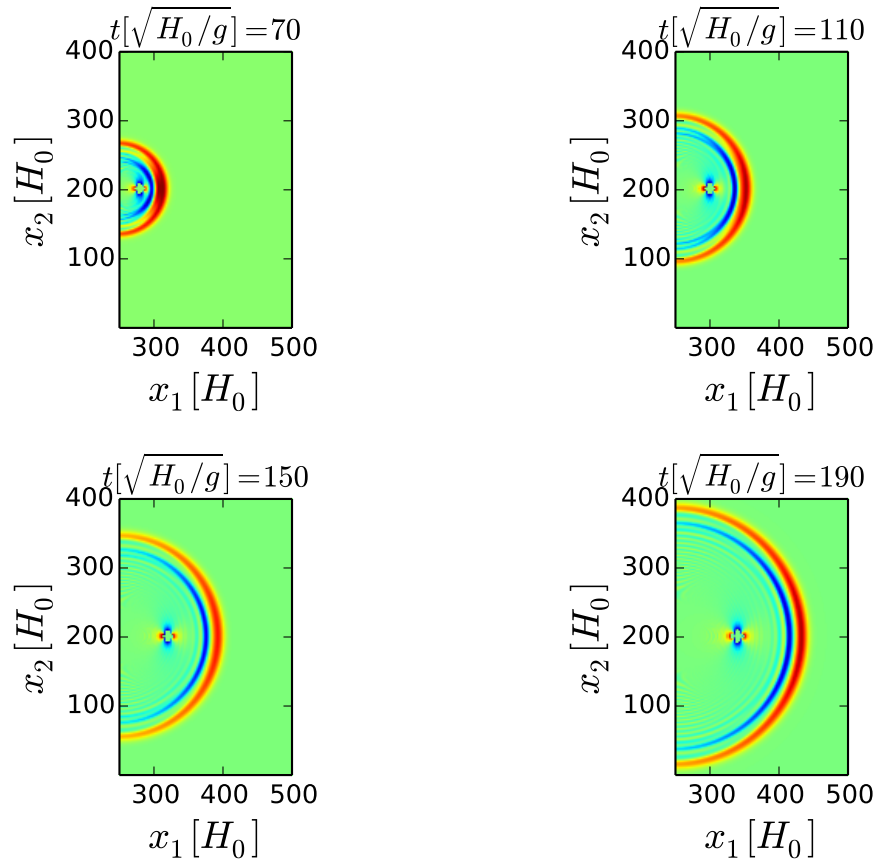
Color Magic, kanal 200 m, $H_0 = 30$, $F = 0.5$



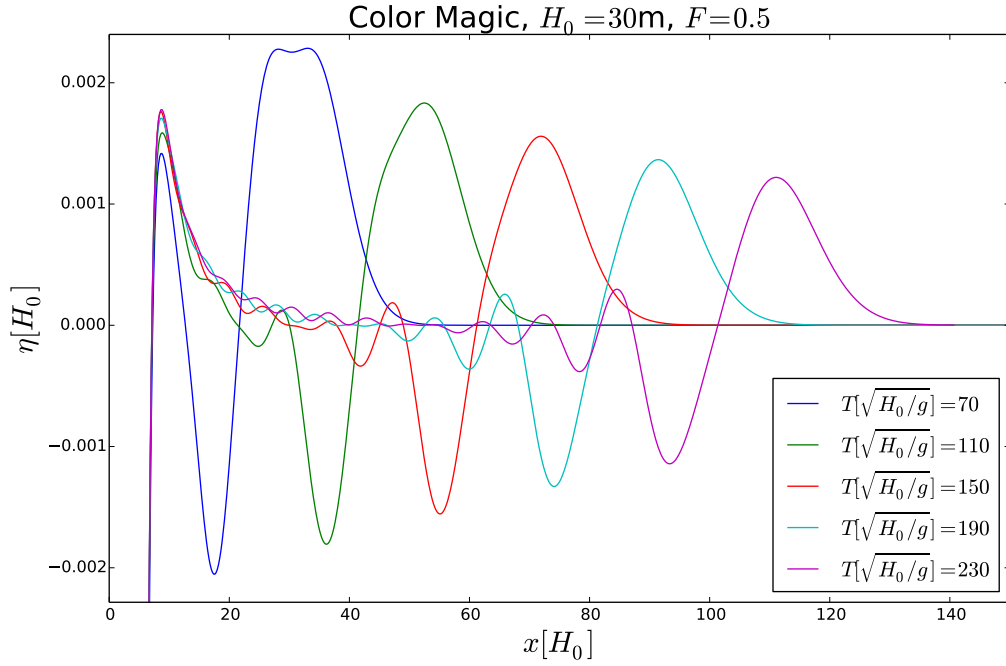
Figur 6.2: Sammenligning av resulater fra Boussinesqmodellen og den lineære og fullt dispersive modellen

6.1.3 Ubegrenset utstrekning

Som vist i figur 6.2 ble det ikke dannet en ny oppstrømsbølge ved stasjonær påvirkning i kanalen på 200 m. For å dokumentere at det ikke løper fra noen bølge på ubegrenset hav er tredimensjonale bølgemønstre vist i figur 6.3, og snittet longitudinalt gjennom midten av trykkfordelingen vist i figur 6.4. Fra $T[\sqrt{H_0/g}] = 150$ til $T[\sqrt{H_0/g}] = 250$ øker ikke bølgen som er lokalisert rett foran forstyrrelsen, og en ny oppstrømsbølge vil derfor ikke sendes ut. Flere beregninger med flat bunn og ubegrenset utstrekning som dokumenterer oppstartsbølgen er vist i G



Figur 6.3: Tidsutvikling av overflatehevningen



Figur 6.4: Tidsutvikling av overflatehevingen foran trykkforstyrrelsen

6.2 Variabel bunn

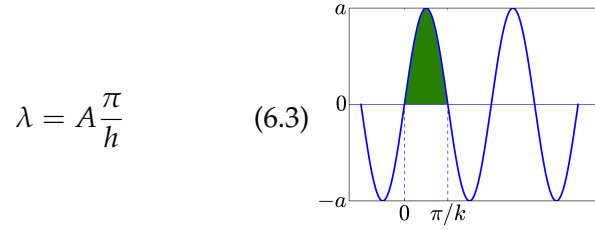
6.2.1 Bunntopografien og trykkforstyrrelsen

I beregningene med variabelt dyp er H_0 satt til 40 m, og standardverdien for δ_B er 0.25. Da endres dypet fra 50 m til 30 m. Topografien er illustrert i figur 3.2. Parametrene brukt i trykkfordelingen er

$$\begin{aligned} H_0 &= 40, & l_1 &= \frac{156.8}{H_0}, & l_2 &= \frac{35}{H_0}, \\ P_m &= \frac{6}{H_0}, & \alpha &= 0.5, & \beta &= 1.5 \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.2.2 Definisjon av bølgelengden

Lengden til bølgen er definert som lengden til den sinusbølgen som gir samme areal under hevingen, se figur 6.5. I 6.5 er A arealet som måles, h bølgehøyden, og λ bølgelengden.

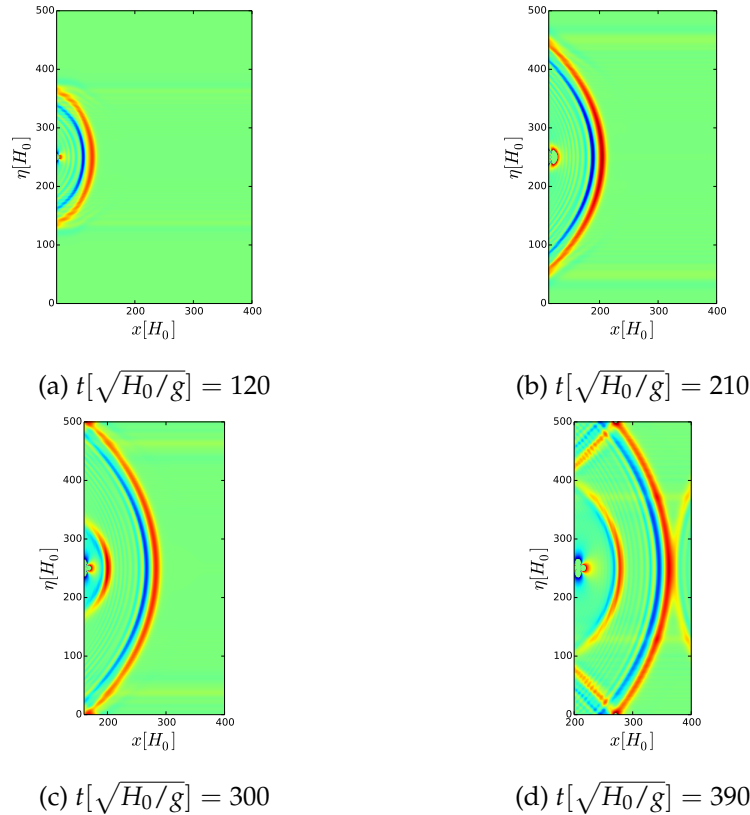


Figur 6.5: Arealet til sinusbølgen, merket med grønt, er brukt for å definere bølgelengden

6.2.3 Ubegrenset utstrekning

Figur 6.6a og 6.6b viser bølgen som er forårsaket av oppstarten stråle vekk fra trykkfordelingen. Ved overgangen til grunnere vann øker høyden til bølgen lokalisert rett foran båten. Denne bølgen løper så fra båten, og figur 6.6d viser to tydelige bølgefronter. Den ene er forårsaket oppstarten, og den andre er sendt ut etter overgangen til grunnere vann.

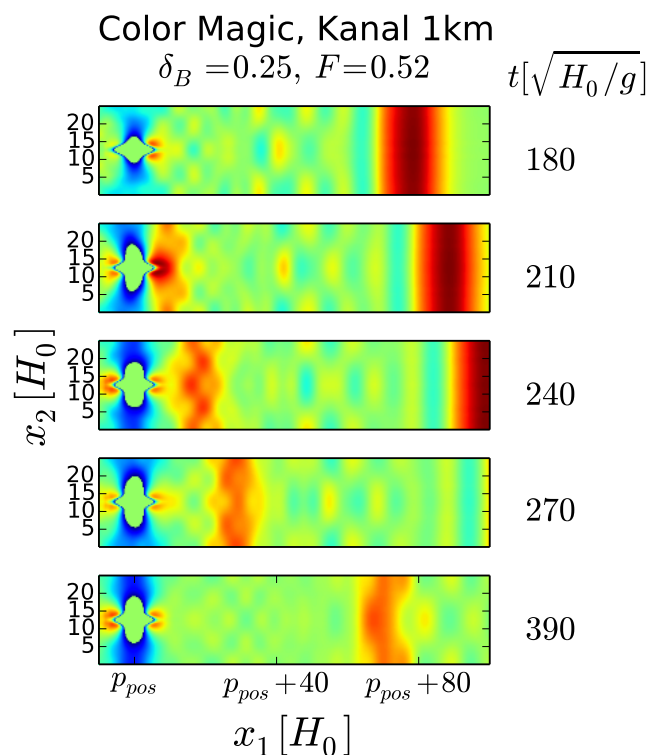
Color Magic, $\delta_B = 0.25$, $F = 0.52$



Figur 6.6: Overflatehevingen foran trykkfordelingen. Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.2.4 Kanalbredde på 1km

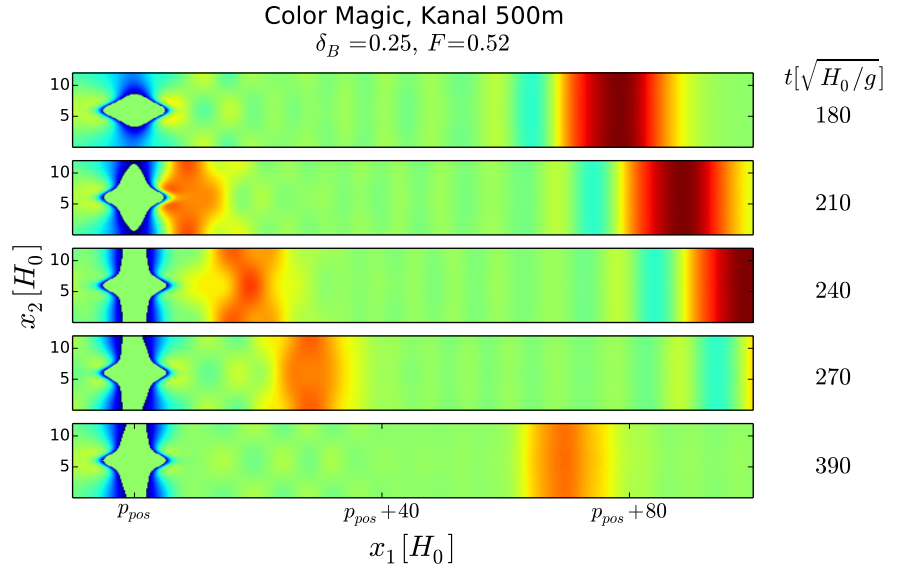
Figur 6.7 viser dannelsen og utsendingen av bølgen oppstrøms. For å få en god visualisering av bølgen er store negative overflateverdier satt til null. Terskelverdien er valgt slik at det kun er overflaten under og rundt trykkfordelingen som berøres. Denne teknikken er brukt i alle tredimensjonale figurer. Oppstrømsbølgen i det øverste bilde er fra oppstarten, men det er også begynt å dannes en bølge ved fronten av forstyrrelsen. Denne bølgen løsrives og løper fra forstyrrelsen slik de neste bildene viser. At bølgen oppstrøms ikke får en plan front kan skyldes at kanalen er relativt bred, men bølgetoget bak den ledende oppstartsbølgen kan også ha påvirket den nye oppstrømsbølgen.



Figur 6.7: Overflatehevingen foran forstyrrelsen. Her er F oppgitt for $H_0 = 40m$

6.2.5 Kanalbredde på 500m

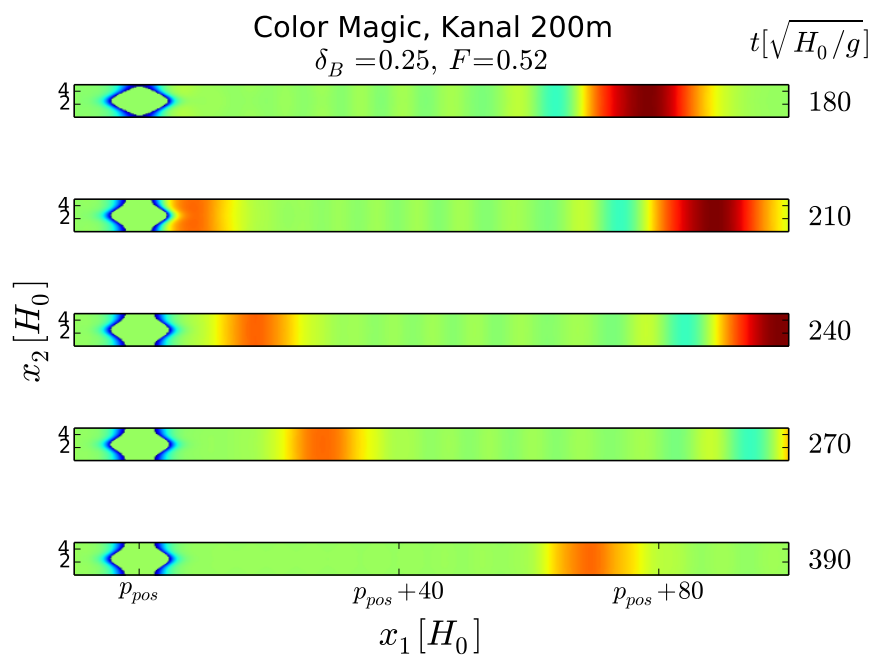
Figur 6.8 viser overflaten ved samme tidspunktene som figur 6.7. Sammenlignet med bølgen i den 1 km vide kanalen har oppstrømsbølgen i kanalen som er 500 m bred en rettere bølgefront. I kanalen med 500 m bredde retter bølgefronten seg opp etter at bølgen har løsrevet seg fra forstyrrelsen, og ved $t[\sqrt{H_0/g}] = 390$ fremstår bølgefronten som normal på bevegelsesretningen til trykkfordelingen.



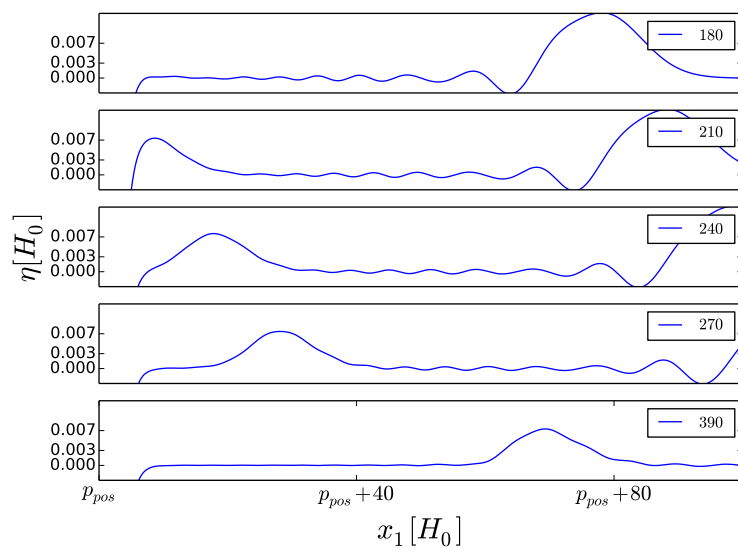
Figur 6.8: Overflatehevningen foran forstyrrelsen. Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.2.6 Kanalbredde på 200 m

Beregningen for den smaleste kanalen er undersøkt grundigere. Figur 6.9a viser samme tendens som figur 6.8 med en rett bølgefront, og bølgen oppstrøms fremstår som todimensjonal på et tidligere tidspunkt enn i kanalen på 500 m. Snittet fra midten av kanalen er vist i figur 6.9b, og det ser ikke ut til at bølgen endres mye i form eller høyde. Dette bekreftes av figur 6.10a og 6.10b som viser en høyde og bølgelengde uten store endringer etter at bølgen har løpt fra forstyrrelsen. Figur 6.10c viser bølgesteillheten definert som $ak = \frac{2\pi a}{\lambda}$, hvor a er den maksimale høyden til bølgen. Steilheten er et mål på hvor ikke-lineær bølgen er, og siden maksverdi er 0.00036 får vi bekreftet at den lineære tilnærmingen er tilstrekkelig.



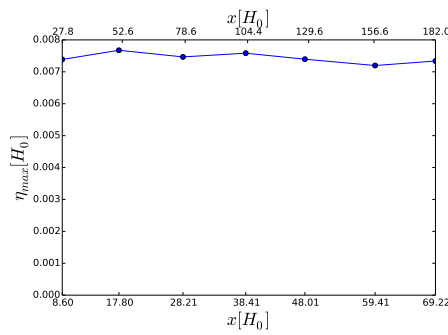
(a)



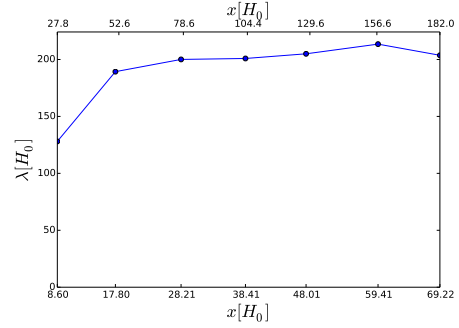
(b)

Figur 6.9: Overflatehevningen i (a) og snittet fra midten av kanalen er vist i (b). Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

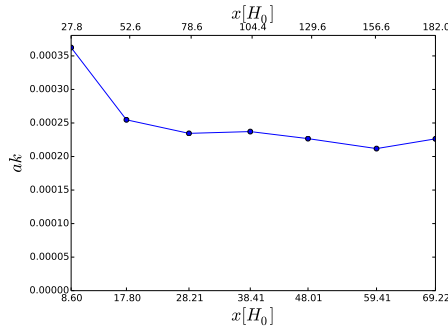
Color Magic, Kanal 200m,
 $\delta_B = 0.25, F = 0.52$



(a) Bølgehøyden



(b) Bølgelengden utregnet i henhold til formelen i 6.3



(c) Bølgesteilheten

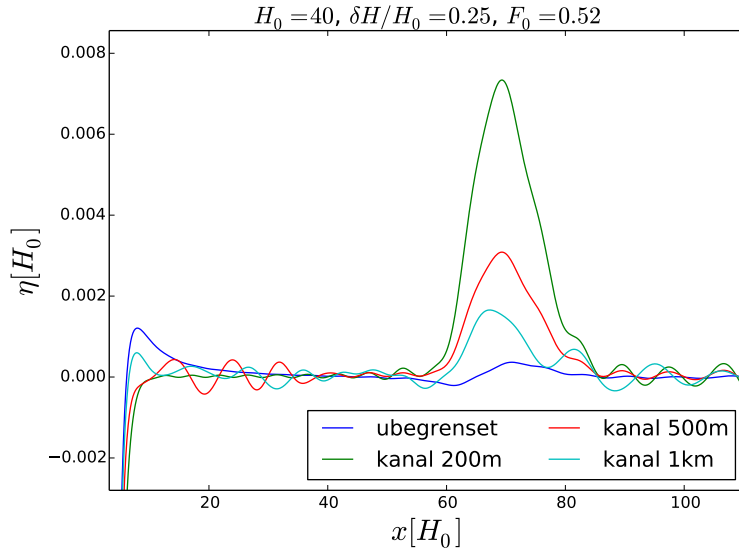
Figur 6.10: Den nedre x-aksen viser avstanden fra midtpunktet i trykket toppen av bølgen, mens den øvre aksene viser avstanden fra midten av dybdeendringen b_0 til toppen av bølgen. Tidsrommet er $t[\sqrt{H_0/g}] \in [210, 390]$. Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.3 Effekten av ulike parametre

I følgende avsnitt brukes notasjonen $\delta H / H_0$ for δ_B

6.3.1 Kanalbredden

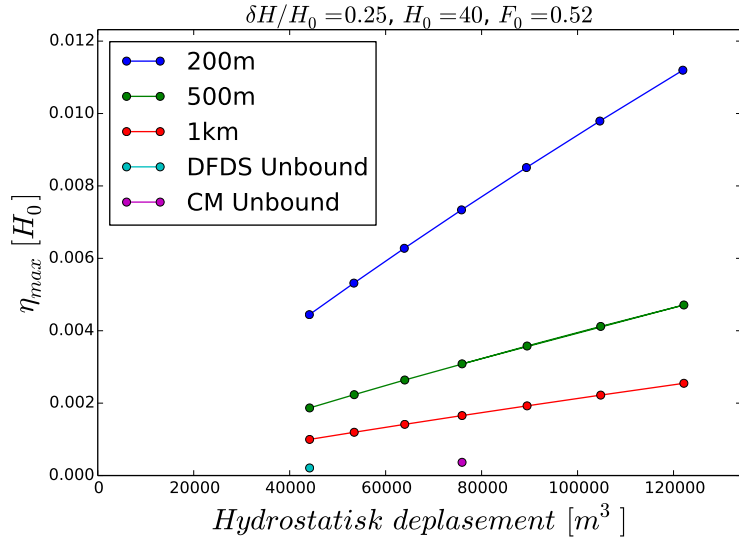
Effekten av begrenset lateral utstrekning er vist i figur 6.11. En klar effekt er at en smalere kanal gir en høyere bølge.



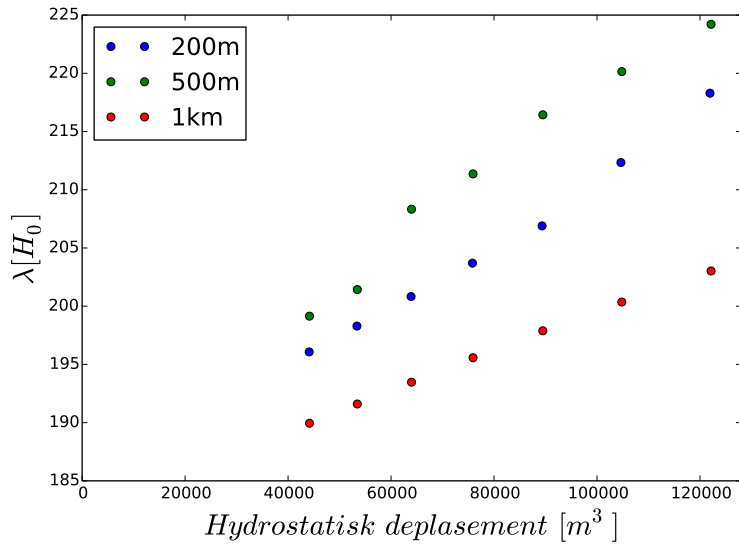
Figur 6.11: Sammenligning av bølgen foran forstyrrelsen ved $t[\sqrt{H_0/g}] = 390$ for ubegrenset hav og kanal med bredde 1 km, 200 m og 500 m. Her er F_0 oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.3.2 Fortrengt volum

Volumet som er oppgitt tilsvarer det fortrengte volumet vi ville fått ved hydrostatiske forhold. Figur 6.15 viser at bølgehøyden er tilnærmet proporsjonal med volumet. Dette ser ut til å gjelde for alle kanalbreddene. Bølgehøyden for volum som tilsvarer Color Magic og Pearl Seaways på ubegrenset utstrekning er merket med henholdsvis "CM" og "DFDS". Bølgelengden er også vist mot volumet, og i figur 6.13 vises en ganske lineær relasjon mellom bølgelengden og volumet. Endringen av bølgelengden er relativt svak, og en endring av volumet gir derfor ikke et stort utslag på bølgelengden.



Figur 6.12: Bølgehøyden vist mot det fortrengte volumet for ulike kanalbredder. Volum tilsvarende Color Magic og Pearl Seaways er også vist for ubegrenset ustrekning. Alle verdiene er for $t[\sqrt{H_0/g}] = 390$. Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

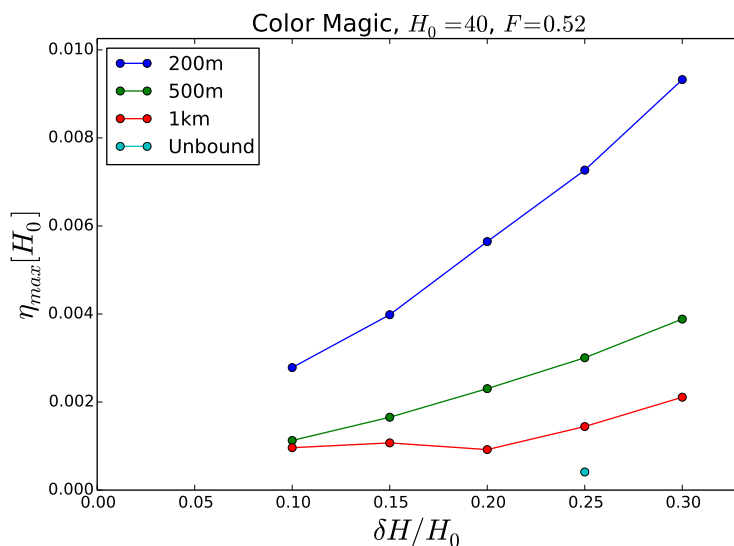


Figur 6.13: Bølgelengden vist mot det fortrengte volumet for ulike kanalbredder. Alle verdiene er for $t[\sqrt{H_0/g}] = 390$

6.3.3 Dybdeendringen

Relasjonen mellom magnituden på dybdeendringen og bølgehøyden er mindre tydelig enn relasjonen til volumet. For kanalene med vidde på 200 m og 500 m er det likevel en klar proporsjonal tendens. Det er vanskeligere

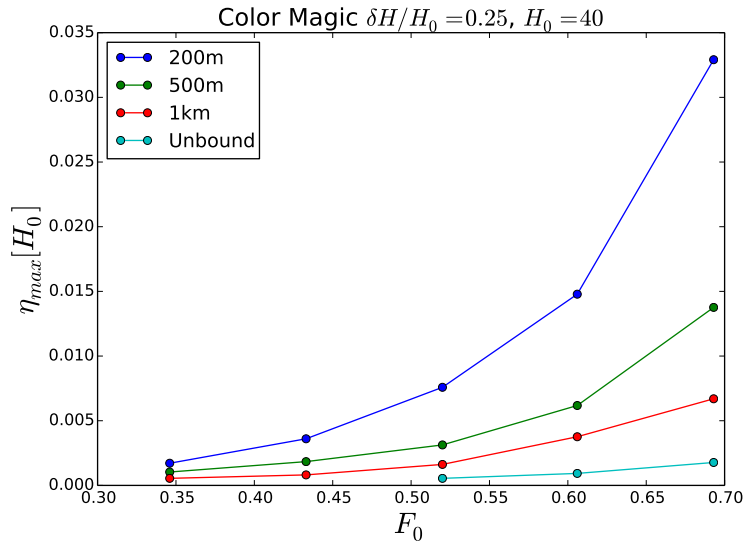
å si noe for kanalen med bredde på 1 km, da verdien for $\delta_B = 0.2$ avviker såpass mye fra en lineær oppførsel.



Figur 6.14: Bølgehøyden for ulike bunnvariasjoner. Bølgehøyden målt når bølgen har samme avstand fra trykkfordelingen for alle hastighetene. Her er F oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.3.4 Hastigheten

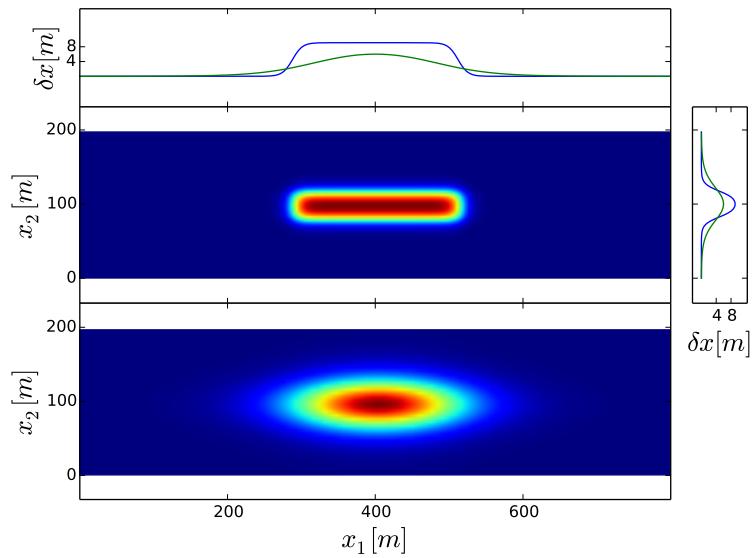
En høyere hastigheten gir ikke proporsjonal økning av bølgehøyden slik volum- og dybdeendring gjør. For kanalen med bredde på 200 m gir en dobling av hastigheten fra $F_0 = 0.346$ til $F_0 = 0.693$ en 19 ganger så stor bølgehøyde. En liten endring av hastighet kan altså gi store utslag i bølgehøyden. Effekten av hastighetsendringen er størst for de høyeste hastighetene, men selv på de laveste hastighetene er utslaget på bølgehøyden stort.



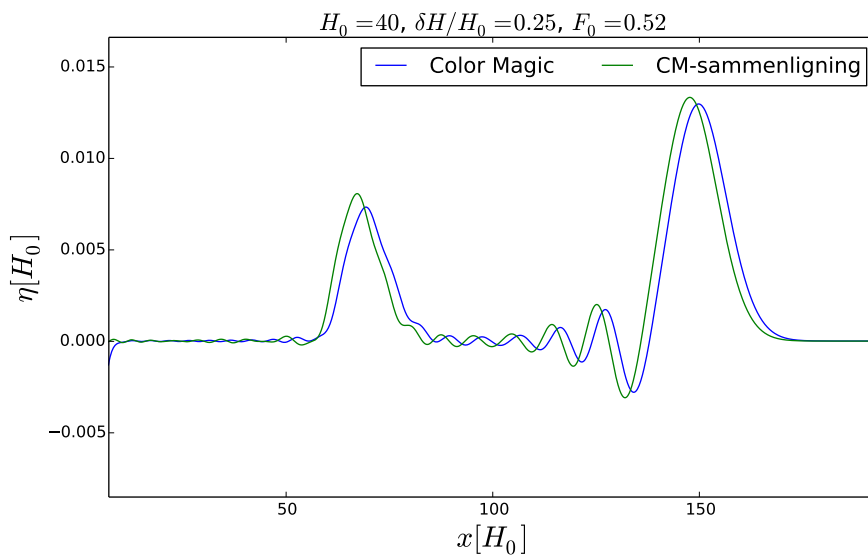
Figur 6.15: Her er bølgehøyden målt når bølgen har samme avstand fra trykkfordelingen for alle hastighetene. Her er F_0 oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

6.4 Trykkfordelingen

Figur 6.16 viser trykkfordelingen som er brukt i beregningene, og en trykkfordeling som er steilere og mer lik geometrien til Color Magic. Fordelingene har samme fortrenkte væskemengde. Trykkfordelingen som er brukt i beregningene er valgt fordi det er glattere, og derfor numerisk mer stabilt. Å velge det glatteste trykket gjorde det mulig å gjøre beregninger med ubegrenset utstrekning over lengre tid, siden den krever en mindre fin oppløsning for å unngå Gibbs fenomen. Beregningen vist i figur 6.17 viser at forskjellen mellom to representasjonene ikke gir store utslag i resultatene.



Figur 6.16: Trykkfordelingen brukt i beregningene er vist i det nederste bildet, mens bildet over viser en steilere. Snitt fra midten i lateral retning er vist øverst, og snitt fra midten i transversal retning er vist til høyre

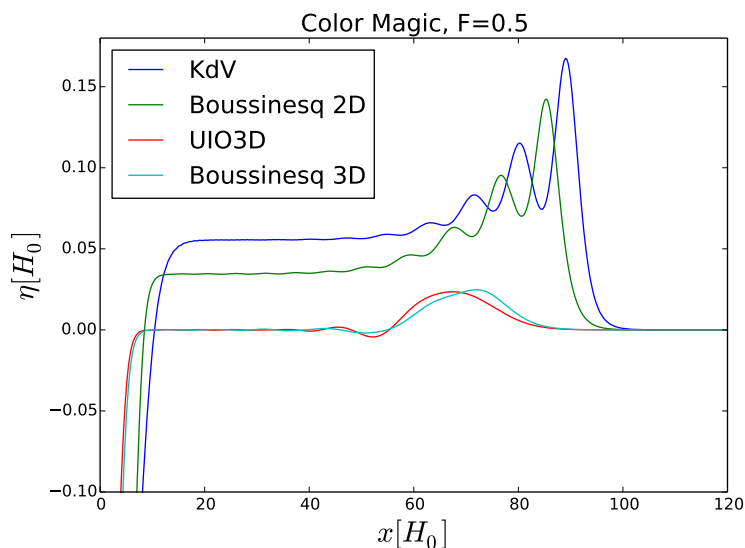


Figur 6.17: Trykkfordelingen sammenlignet med steilere trykk. En kanal med vidde 200 m er brukt. Her er F_0 oppgitt for dybden $H_0 = 40m$

Kapittel 7

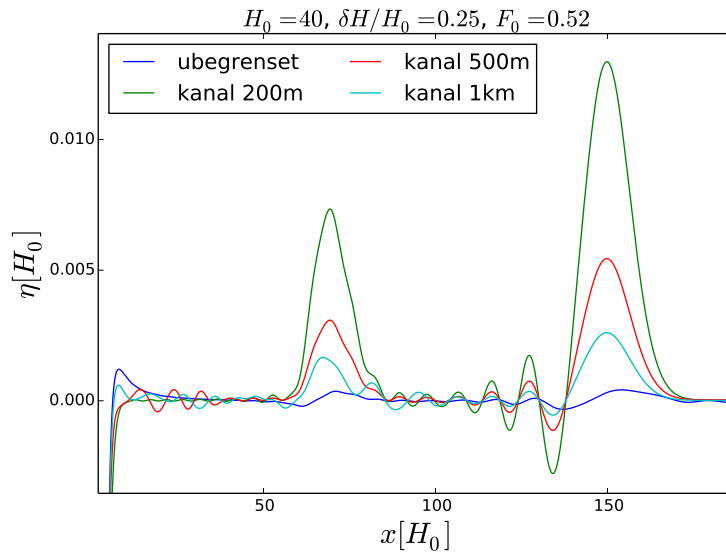
Konklusjon

Med flat bunn er beregninger utført med KdV-modellen, Boussinesq-modeller for to og tre dimensjoner, og en lineær og fullt dispersive modell. Alle modellene gav en oppstrøms bølge når trykket ble satt på og akselerert til den ønskede hastigheten. I de tredimensjonale beregningene ble en oppstrømsbølge sendt ut både i et ubegrenset beregningsdomene, og i kanaler av ulik vidde. Ved sammenligning av resultatene fra de todimensjonale og tredimensjonale beregningene kommer det klart fram at tredimensjonale effekter er viktige, selv for den smaleste kanalen. Den smaleste kanalen er på 200 m, og bredden er valgt fordi det trangeste farvannet Color Magic passerer har omtrent den bredden. Figur 7.1 viser oppstrømsbølgen beregnet med de todimensjonale modellene og de tredimensjonale modellene med den smaleste kanalen. De todimensjonale modellene gir så høye bølgehøyder at de, for dette problemet, ikke er egnet. Figur 7.1 viser også at lineær teori er en god tilnærming. Dette kan vi si av to grunner. For det første gir den tredimensjonale Boussinesqmodellen, som er svakt ikke-lineær, og den lineære og fullt dispersive modellen resultater som samsvarer godt. I tillegg ser vi at bølgesteilheten, som er et mål på ikke-lineariteten, er veldig liten.



Figur 7.1: Sammenligning av bølgen foran Color Magic ved bruk av KdV, todimensjonal Boussinesq, tredimensjonal Boussinesq og den lineære, fullt disperse modellen

En bølge fra oppstarten forklarer midlertidig ikke fenomenet på Askholmene, og ved konstant hastighet og flat bunn gir ingen av modellene en ny oppstrøms bølge. Siden beregninger er gjort med bredde og dyp tilsvarende det trangeste og grunneste farvannet ved Askholmene kan vi konkludere med at kun en stasjonær påvirkning fra Color Magic med Froudetall rundt en halv ikke gir den virkningen oppstrøms som er observert. At oppstarten genererte en bølge motiverte til å undersøke overgang til grunnere vann. I de skalerte ligningene inngår ikke dybden eksplisitt, men den er brukt som skalering av alle lengder. Å redusere dypet vil derfor være det samme som å øke lengden, bredden, styrken og hastigheten til trykkfordelingen, i tillegg til å øke kanalbredden. Ved oppstarten økes trykkstyrken og hastigheten gradvis. Disse prosessene har derfor mange likheter, og det viste seg at overgangen til grunnere vann også kan generere en oppstrøms bølge. Beregningene for variabel bunn er gjort med den lineære, fullt disperse modellen. Denne modellen ble valgt til fordel for den tredimensjonale Boussinesqmodellen fordi den gjør færre beregninger hvert tidssteg, og gir dermed mulighet til å bruke større beregningsområder. Med konstant hastighet på 10.3 m/s over en dybdeendring fra 50 m til 30 m ble en bølge sendt ut oppstrøms både for ubegrenset utstrekning og kanaler på 1 km, 500 m, og 200 m bredde. De tredimensjonale bølgemønstrene er vist i figur 6.6, 6.7, 6.8 og 6.9a. Bølgen sendt ut etter dybdeendringen er vist i figur 7.2. Den fremste bølgen og bølgetoget bak den er generert av oppstarten, mens den andre bølgen, ved $x[H_0] \simeq 70$, er forårsaket av overgangen til grunnere vann.



Figur 7.2: Sammenligning av bølgen foran Color Magic for ubegrenset domene og kanaler med ulik bredde.

At en bølge sendes ut i et domene med ubegrenset utstrekning viser at bredden til kanalen ikke er avgjørende for om det sendes ut en bølge eller ikke, men som figur 7.2 viser er bølgen høyere for en smalere kanal. Videre er det undersøkt hvilken rolle størrelsen på skipet har å si for effekten oppstrøms. Som mål på størrelsen er det fortrengte volumet under trykket, ved hydrostatiske forhold, brukt. Beregninger gjort i kanal med 200 m, 500 m og 1 km vidde viser at bølgehøyden er proporsjonal med volumet i det undersøkte parameterområdet (figur 6.12). At vi ser samme oppførsel for alle kanalviddene gir grunn til å tro at det er en oppstrøms effekt foran mindre skip også. Pearl Seaways er et annet skip som også passerer Askholmene, det har omtrent halvparten så stort volumet som Color Magic. Hvis Pearl Seaways har samme Froudetall som Color Magic forventer vi ut fra beregningene en oppstrømsbølge som er halvparten så høy som oppstrømsbølgen foran Color Magic.

Det er også gjort beregninger for ulike bunnendringer, se figur 6.14. Den minste endringen er 8 m, fra 44 m til 36 m, og den største er 24 m, fra 52 m til 28 m. I kanalene med bredde på 200 m og 500 m fremstår bølgehøyden som proporsjonal med hvor mye dypet endres. For kanalen med bredde på 1 km er det vanskeligere trekke en konklusjon fordi det er usikkert om bølgetoget bak oppstartsbølgen påvirker bølgen. Til slutt er bølgehøyden for ulike hastigheter beregnet (figur 6.15). Her er det ikke en lineær sammenheng, men en vi ser at en liten endring i hastighet gir stort utslag i bølgehøyde. Når trykkfordelingen er på det grunneste området spenner Froudetallet fra 0.4 til 0.8. I kanalen med bredde 200 m vil en økning av Froudetallet med 0.1 grovt sett gi en dobling av bølgehøyden. Pearl Seaways har en lavere service fart enn Color Magic, og hvis skipene holder denne farten gir det Froudetall på 0.48 og 0.66 ved dyp på 30 m. Sammen med volumforskjellen mellom skipene kan dette forklare hvorfor

oppstrøms bølger fra Pearl Seaways ikke er kjent.

7.1 Videre arbeid

I denne oppgaven endres dypet kun i longitudinal retning, så en naturlig utvidelse er bunntopografier som også endres i transversal retning. Det er ikke sett på hvilken effekt en innsnevring i en kanal har på virkningen oppstrøms. Det kan godt tenkes at en overgang til smalere vidde kan trigge utsending av en bølge oppstrøms på samme måte som overgangen til grunnere vann.

Tillegg

Tillegg A

Detaljer fra utledningen av den lineære og fullt dispersive metoden

A.1 Rekkeutvikling av ledd i Greenfunksjonene

I integralene 5.19 og 5.20 inngår ulike kildefordelinger, og her vises rekkeutviklingen av disse. For å forenkle notasjonen defineres ψ_{1-6} som

$$\psi_1 = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@S \\ (\mathbf{x}',y')@S}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\eta' - \eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\eta' + \eta + 2H_0)^2}} \quad (\text{A.1})$$

$$\psi_2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@B \\ (\mathbf{x}',y')@S}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (H_0 + \eta' - \delta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (H_0 + \eta' + \delta)^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_3 = \left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@S \\ (\mathbf{x}',y')@B}} \quad (\text{A.3})$$

$$\psi_4 = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \nabla' \eta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@S \\ (\mathbf{x}',y')@S}} \quad (\text{A.4})$$

$$\psi_5 = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \nabla' \eta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@B \\ (\mathbf{x}',y')@S}} \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_6 = \left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x},y)@B \\ (\mathbf{x}',y')@B}} \quad (\text{A.6})$$

ψ_1 og ψ_2 rekkeutvikles om η, δ :

$$\psi_1 = (\psi_1)_{\eta'=\eta=0} + \eta' \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta'} \right)_{\eta'=\eta=0} + \eta \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta'=\eta=0} + \mathfrak{R}_1 \quad (\text{A.7})$$

$$\psi_2 = (\psi_2)_{\eta'=\delta=0} + \eta' \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta'} \right)_{\eta'=\delta=0} + \delta \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \delta} \right)_{\eta'=\delta=0} + \mathfrak{R}_2 \quad (\text{A.8})$$

hvor \mathfrak{R}_1 og \mathfrak{R}_2 er av orden η^2, δ^2 . En omskriving av koeffisientene til η, η' og δ gir

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta'} \right)_{\eta'=\eta=0} = \frac{\partial}{\partial (2H_0)} \left(\frac{1}{R_B} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta'=\eta=0} = \frac{\partial}{\partial (2H_0)} \left(\frac{1}{R_B} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta'} \right)_{\eta'=\delta=0} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \delta} \right)_{\eta'=\delta=0} = -2 \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{1}{R_0} \right) \quad (\text{A.12})$$

ψ_1 og ψ_2 kan da skrives

$$\psi_1 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + (\eta' + \eta) \frac{\partial}{\partial 2H_0} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \mathfrak{R}_1, \quad (\text{A.13})$$

$$\psi_2 = \frac{2}{R_0} - 2\delta \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{1}{R_0} \right) + \mathfrak{R}_2. \quad (\text{A.14})$$

De normalderiverte av kildene, ψ_{3-6} , rekkeutvikles også om δ og η

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x}, y) @ S \\ (\mathbf{x}', y') @ B}} \\ &= 2\nabla' \cdot \left(\delta' \nabla' \frac{1}{R_0} \right) + \mathfrak{R}_3\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}\psi_4 &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \nabla' \eta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x}, y) @ S \\ (\mathbf{x}', y') @ S}} \\ &= \frac{\partial}{\partial(2H_0)} \frac{1}{R_1} - \nabla' \cdot \left((\eta' - \eta) \nabla' \frac{1}{R} \right) - \nabla' \cdot \left((\eta' + \eta) \nabla' \frac{1}{R_1} \right) \\ &\quad + \mathfrak{R}_4\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}\psi_5 &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \nabla' \eta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x}, y) @ B \\ (\mathbf{x}', y') @ S}} \\ &= -2\nabla' \cdot \left(\eta' \nabla' \frac{1}{R_0} \right) + \mathfrak{R}_5\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}\psi_6 &= \left(\left(-\frac{\partial}{\partial y'} + \nabla' \delta' \cdot \nabla' \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{1B}} \right) \right)_{\substack{(\mathbf{x}, y) @ B \\ (\mathbf{x}', y') @ B}} \\ &= \frac{\partial}{\partial(2H_0)} \frac{1}{R_1} + \nabla' \cdot \left((\delta' - \delta) \nabla' \frac{1}{R_0} \right) + \nabla' \cdot \left((\delta' + \delta) \nabla' \frac{1}{R_0} \right) \\ &\quad + \mathfrak{R}_6\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

hvor \mathfrak{R}_{3-6} er av orden $\eta\delta, \eta^2$. I utregningene av ψ_{3-5} brukes det at $\frac{1}{r}, \frac{1}{r_1}$ og $\frac{1}{r_{1B}}$ oppfyller Laplaces ligning utenfor kildepunktene. I tillegg benyttes omskrivninger fra deriverte med hensyn på y , til deriverte med hensyn på H_0

A.2 Omskriving og fouriertransformasjon av $\frac{1}{R_a}$

Integralet I defineres slik

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + iR \cos(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{i}{2}R (e^{i\theta} + e^{-i\theta})} d\theta. \quad (\text{A.19})$$

Ved å gjøre substitusjonen $z = e^{i\theta}$ blir integralet

$$I = -\frac{1}{\pi R} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - \frac{i2a}{R}z + 1} dz = -\frac{1}{\pi R} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} dz, \quad (\text{A.20})$$

hvor $z_0 = i(\frac{a}{R} + \sqrt{(\frac{a}{R})^2 + 1})$ og $z_1 = i(\frac{a}{R} - \sqrt{(\frac{a}{R})^2 + 1})$. Siden z_0 ligger utenfor $|z| = 1$ trengs bare residualet i $z = z_1$

$$\text{Res}|_{z=z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} = -\frac{1}{2i\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2 + 1}}. \quad (\text{A.21})$$

Integralet blir da

$$I = -\frac{1}{\pi R} (2\pi i \text{Res}|_{z=z_1}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \quad (\text{A.22})$$

Ved å skrive

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + iR \cos(\theta)} d\theta, \quad (\text{A.23})$$

og integranden som

$$\frac{1}{a + iR \cos(\theta)} = \int_0^\infty e^{-k(a + iR \cos(\theta))} dk, \quad (\text{A.24})$$

kan $\frac{1}{R_a}$ uttrykkes som et integral over hele k -rommet. Med litt matematisk sjonglering kommer vi fram til en invers fouriertransformasjon

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-k(a + iR \cos(\theta))} dk d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \int_0^\infty e^{-k(a + iR \cos(\theta-\alpha))} dk d\theta. \quad (\text{A.25})$$

Vi benytter identiteten $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha)$ og får

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_a} &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \int_0^\infty e^{-ka - i[R \cos(\alpha)k \cos(\theta) + R \sin(\alpha)k \sin(\theta)]} dk d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} dk d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{k} e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk_1 dk_2 \\ &= \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{k} e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Fouriertransformen til $\frac{1}{R_a}$ er derfor

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{R_a} \right\} = \frac{2\pi}{k} e^{-ka - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (\text{A.27})$$

A.3 Fouriertransform av $\frac{1}{R}$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2. \quad (\text{A.28})$$

Vi innfører de nye variablene $\hat{x}_1 = x'_1 - x_1$ og $\hat{x}_2 = x'_2 - x_2$ og får

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2. \quad (\text{A.29})$$

Ved å gå over til sylinderkoordinater kan vi skrive

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{R}\right\} &= 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i2\pi R(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} dR d\theta \\ &= 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^{2\pi} \delta(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \frac{1}{|-k_1 \sin \theta_0 + k_2 \cos \theta_0|} \\ &= \frac{2\pi}{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Her er δ Diracs deltafunksjon og vi bruker egenskapen at $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$ der $f(x_0) = 0$.

A.4 Fouriertransformasjon av ledd i Greenfunksjonen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{-2 \int_{B'} \delta' \nabla' \Phi_B^{(1)'} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{R_0}\right) d\mathbf{x}'\right\} &= -2 \int_{B'} \delta' \nabla' \Phi_B^{(1)'} \cdot \nabla' \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{R_0}\right\} d\mathbf{x}' \\ &= -2 \int_{B'} \delta' \nabla' \Phi_B^{(1)'} \cdot (-i\mathbf{k}) \frac{2\pi}{k} e^{-kH_0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \\ &= 4\pi i \frac{\mathbf{k}}{k} e^{-kH_0} \mathfrak{F}\left\{\delta \nabla \Phi_B^{(1)}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

A.5 Utregning av e^{-Mt}

$$\begin{aligned}
 e^{-Mt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Mt)^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega t)^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \omega t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(\omega t)^2}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{(\omega t)^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(\omega t)^4}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi kjenner igjen de ulike elementene i matrisen som taylor-utviklingen til \sin og \cos :

$$\begin{aligned}
 A_{0,0} &= 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \dots = \cos(\omega t) \\
 A_{1,1} &= A_{0,0} = \cos(\omega t) \\
 A_{0,1} &= \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \dots = \sin(\omega t) \\
 A_{1,0} &= -A_{0,1} = -\sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

Med dette kan vi skrive:

$$e^{-Mt} = A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

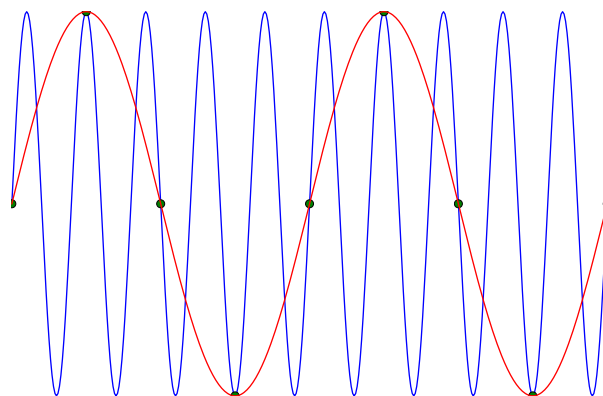
Vi kommer også til å bruke eksponentialen med negativt argument.

$$e^{Mt} = A(-t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Tillegg B

Aliasing

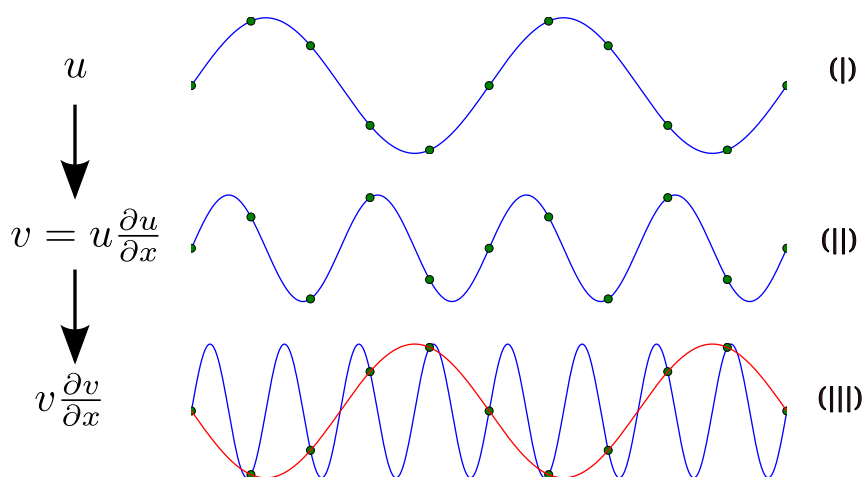
Med aliasing mener vi at høye frekvenser opptrer feilaktig som lave frekvenser. Fenomenet er blant annet beskrevet av Bengt Fornberg i "A practical guide to Pseudispectra Methods" [12], og figur B.1 og B.2 er med små endringer hentet derfra. Aliasing oppstår hvis oppløsningen er for lav for signalet. I første omgang kan det skje når initialtilstanden samples, men hvis man utfører ikke-lineære operasjoner kan aliasing også oppstå i løpet av beregningen. Med for lav oppløsning menes en oppløsning med mindre enn to punkter per bølgelengde. Dette fordi det trengs minst to punkter per bølgelengde for å representere en svingning korrekt. Sagt på en annen måte må samplingsfrekvensen være minst dobbelt så høy som den høyeste frekvensen i signalet. Figur B.1 viser hvordan samplingen av to ulike signaler kan se like ut hvis samplingsfrekvensen er for lav.



Figur B.1: Funksjonene $\sin(10\pi x)$ og $\sin(2\pi x)$ kan ikke skilles fra hverandre med samplingspunkter i $x_j = -1 + \frac{1}{4}j, j = 0, 1, \dots, 8$

De fleste beregningene i denne oppgaven starter fra ro, og da byr ikke startsamplingen på problemer. Men i løpet av simuleringene utføres det ikke-lineære operasjoner, og figur B.2 viser hvordan aliasing da kan oppstå. Signal (|||) vist med blå graf kan ikke skilles fra den røde grafen som har

lavere frekvens.



Figur B.2: Ikke-lineære operasjoner med $u = \sin(2\pi x)$ på intervallen $[-1, 1]$

I beregninger med overflatehevning vil aliasing føre til at energi fra høye bølgetall blir overført til lave bølgetall. For å unngå dette brukes nullstilling etter fouriertransformasjon av alle ikke-lineære ledd. Ved nullstilling settes fourierkoeffisientene til de øvre frekvensene til null. I implementasjonen settes den øvre halvdelen av frekvensene til null. J. P. Boyd [5] viser at det er tilstrekkelig å nulle ut den øvre tredelen for kvadratiske ikke-lineariteter, også kjent som Orzag- $\frac{2}{3}$ -rule. Siden de sterkeste ikke-linearitetene er kvadratisk er nullstillingen som benyttes mer enn god nok.

Tillegg C

En eksakt løsning av KdV-ligningen

B. Gjevik m.fl. [15] viser hvordan KdV-ligningen kan løses for en heving med permanent form. Variablen $\psi = x - Ft$ innføres, og ligningen går over til en ordinær differensialligning.

$$\eta''' + 6(1 - F)\eta' + 9\eta\eta' = 0 \quad (\text{C.1})$$

Denne er integrerbar, og kan derfor gjøres om til

$$\eta'' + 6(1 - F)\eta + \frac{9}{2}\eta^2 = \text{konstant} \quad (\text{C.2})$$

Siden bølgen dør av i uendelig må konstanten være null. Ved å multiplisere med η' får vi en ny integrerbar ligning

$$\left(\frac{1}{2}(\eta')^2 + 3(1 - F)(\eta^2) + \frac{3}{2}(\eta^3) \right)' = 0$$
$$\frac{1}{2}\eta'^2 + 3(1 - F)\eta^2 + \frac{3}{2}\eta^3 = \text{konstant} \quad (\text{C.3})$$

Konstanten er null av samme grunn som tidligere, og konstanten $\beta = 2(F - 1)$ innføres. Dette gir en separabel differensiallikning

$$\eta'^2 = 3[\beta - \eta]\eta^2 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \eta\sqrt{3[\beta - \eta]} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{\eta(0)}^{\eta(\psi)} \frac{1}{\eta\sqrt{3[\beta - \eta]}} d\eta = \int_0^\psi 1 d\psi' = \psi \quad (\text{C.6})$$

For å løse integralet over η byttes variabelen til

$$\eta = \beta \operatorname{sech}^2(\chi) \quad (\text{C.7})$$

$$\Rightarrow d\eta = -2\beta \frac{\sinh(\chi)}{\cosh^3(\chi)} d\chi, \quad \chi = \operatorname{arsech} \sqrt{\frac{\eta}{\beta}} \quad (\text{C.8})$$

Integralet blir da

$$\int_{\eta_0}^{\eta(\psi)} \frac{1}{\eta \sqrt{3[\beta - \eta]}} d\eta = \int_{\chi(\eta_0)}^{\chi(\eta)} \frac{-2}{\sqrt{3\beta}} d\chi = \frac{-2(\chi(\eta) - \chi(\eta_0))}{\sqrt{3\beta}} \quad (\text{C.9})$$

$\chi(\eta_0)$ settes til null, og η kan uttrykkes

$$\eta = \beta \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3\beta}}{2} (x - Ft) \right) \quad (\text{C.10})$$

hvor $F = 1 + \frac{\beta}{2}$

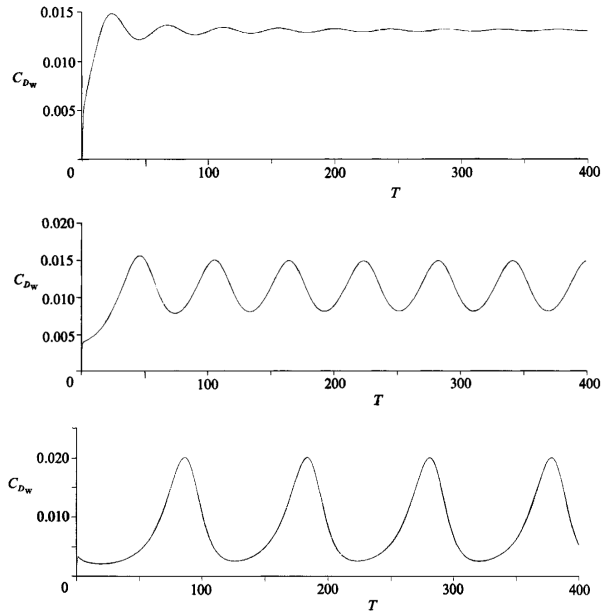
Tillegg D

Beregninger fra KdV-programmet sammenlignet med publiserte resultater

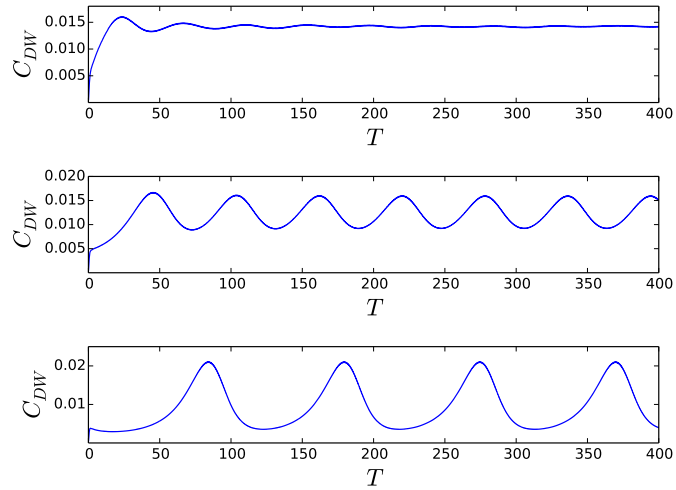
Den tvungne varianten av KdV ligningen ble løst numerisk av Lee et al. [23]. De beregnet bølgemotstanden for subkritisk, kritisk og transkritisk hastighet. Trykkfordelingen brukt i beregningene er som følger

$$p(X, T) = p_m \sin^2 \left[\frac{\pi}{L} (X + FT) \right] \quad \text{for } 0 \leq (X + FT) \leq L \quad (\text{D.1})$$

hvor H_0 og $\sqrt{\frac{H_0}{g}}$ er brukt for å skalere lengde og tid.



(a) Resultatene fra Lee et al [lee1989experiments]



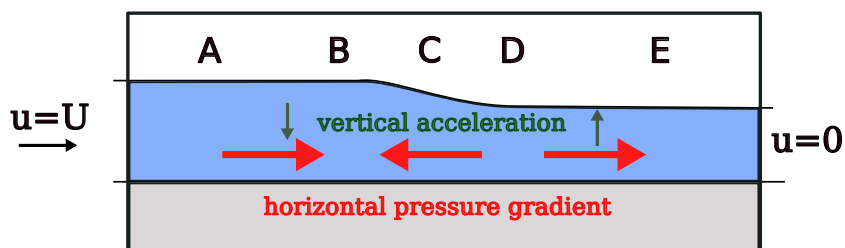
(b) De tilsvarende resultatene fra eget program.

Figur D.1: Fra øverst er Froudetallene 0.85, 1.00 og 1.10 for begge figurene. $L = 2$ og $P_m = 0.1$ for alle hastighetene

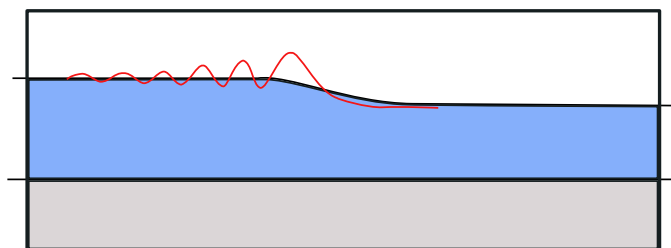
Tillegg E

En bølgende heving

D.H.Peregrine beskriver utviklingen av en undulerende eller bølgende heving [29]. Båren blir definert som bølgende hvis endringen i overflateheving på bølgen er mindre enn 0.28 av det uforstyrrede dypet. Videre skriver han at en måte å danne en bære på er å sende en strøm av vann inn mot stille vann i en lang horisontal kanal. Hvis endringen av vann-dyp mellom vannet i bevegelse og det stillestående vannet er for stor vil brytning oppstå vertfall på den første bølgen, men det vil likevel dannes bølger på båren. En annen ting som er verdt å merke seg er at bølgene er lange sammenlignet med dypet og vi er derfor i langbølgeregimet. Peregrine beskriver også fysikken bak dannelsen av den bølgende båren. Figur E.1 viser situasjonen når steilheten til båren er blitt så stor at den vertikale akselerasjonen spiller inn. Den vertikale akselerasjonen, vist med grønne piler, er rettet oppover mellom C og E og nedover mellom A og C. Ved D er trykket større enn det hydrostatiske og ved B er trykket mindre. Endringen i den horisontale trykkgradienten er vist med røde pilene i figuren. Dette fører til en ekstra heving ved B, en tilsvarende senkning ved D, en svak senkning ved A og en svak heving ved E. Resultatet av dette er generering av bølger, og prosessen gjentaes slik at en rekke bølger formes bakover på båren. En skisse av den bølgende båren er vist i rødt i Figur E.2.



Figur E.1: Viser akselerasjon og trykkgradient



Figur E.2: Kvalitative skisse av den bølgende båren

Tillegg F

Kildekode

F.1 Moderklasse

```
1
2 import numpy as np
3 from numpy import sqrt, sin, cos, pi, exp, tanh
4 from numpy.fft import fftfreq, fft2, ifft2
5
6
7
8 class PotentialSolver3DLIN_bunn(object):
9
10     """
11     Super class
12     Compute the development of a 2HD surface elevation
13     Need a method source_term in inheriting class
14
15
16     dG/dt = e**(Mt)R
17
18     e**(Mt)Theta = G
19
20     where Theta[0] = ETA, and Theta[1] = omega*PHI
21           R[0] = 0, and R[1] = omega*P
22
23     Input:
24     - Initialize by x, and y
25     - Give initial conditions eta0 (elevation) and phi0 (potential)
26       at t=0
27     - user_action
28     - timestep dt, steps between each printing (freq) and number of
29       prints
30
31     Output:
32     - User_action is called with eta, t, and counter
33     - Final t and eta
34
35     """
36
37     def __init__(self, x, y):
38         #Define kx and ky from the spatial horizontal arrays x,y
```

```

39 Nx = len(x)
40 Ny = len(y)
41 dx = x[1]-x[0]
42 dy = y[1]-y[0]
43 kx = 2*pi*fftfreq(Nx, dx)
44 ky = 2*pi*fftfreq(Ny, dy)
45 kx[0] = 0.0001 # Replace kx=0 by k=0.001
46 ky[0] = 0.0001 # Replace ky=0 by k=0.001
47
48 #Make the 2 dimentional k-vector (abs(kvec))
49 kxv, kyv = np.meshgrid(kx, ky, indexing='ij')
50
51 k = sqrt(kxv**2 + kyv**2)
52
53 #The angular frequency
54 self.omega = np.sqrt(k*tanh(k))
55 self.k=k
56 self.kxv = kxv
57 self.kyv = kyv
58 self.zero_padding = np.array(abs(self.k)<=self.k.max()/2.)
59
60 def set_delta(self, dB, b0, b1, s1, s2):
61     """ Calculate the deviation from H_0.
62         H(x) = - H_0 + delta
63     """
64     x, y = self.xv, self.yv
65     self.delta = dB*(-1 + ( tanh(s1*(x-b0 + 0*y)) - tanh(s2*(x-b1
66 ) + 0*y )))
67
68
69 def set_initial_conditions(self, eta0, phi0):
70     #Load the initial conditions into the variable G
71     ETA0 = fft2(eta0)
72     PHI0 = fft2(phi0)
73     self.G0 = ETA0
74     self.G1 = self.omega*PHI0
75
76
77 def solve(self, dt, freq, number_of_prints, user_action=None):
78     """
79     Integrate from t=0 to t=T
80     Return T and eta
81     """
82
83     self.dt = dt
84     N = freq*number_of_prints
85     t = np.linspace(0, dt*N, N+1)
86
87     G0, G1 = self.G0, self.G1
88     G0_new, G1_new = np.zeros_like(G0), np.zeros_like(G1)
89     for n in range(1,N+1):
90         print n
91         dG0, dG1 = self.step_RK4(G0, G1, t[n-1])
92         G0_new = G0.copy() + dG0.copy()
93         G1_new = G1.copy() + dG1.copy()
94         G0 = G0_new.copy()
95         G1 = G1_new.copy()
96         if n%freq==0:

```



```

97         eta, phi = self.eta_phi_from_G(G0, G1, t[n])
98         user_action(eta, t[n], n/freq)
99
100
101
102     eta, phi = self.eta_phi_from_G(G0, G1, t[-1])
103     return t[-1], eta
104
105
106
107 def step_RK4(self, G0, G1, t):
108     """
109     Integrate with Runge Kutta 4 method
110     """
111     dt = self.dt
112     K10, K11 = self.RHS(G0, G1, t)
113     K20, K21 = self.RHS(G0+dt*K10/2., G1+dt*K11/2., t+dt/2.)
114     K30, K31 = self.RHS(G0+dt*K20/2., G1+dt*K21/2., t+dt/2.)
115     K40, K41 = self.RHS(G0+dt*K30, G1+dt*K31, t+dt)
116     dG0 = (dt/6.)*(K10 + 2*K20 + 2*K30 + K40)
117     dG1 = (dt/6.)*(K11 + 2*K21 + 2*K31 + K41)
118     return dG0, dG1
119
120
121
122 def eta_phi_from_G(self, G0, G1, t):
123     """
124     Compute the spatial eta and phi by inverse fouriertransform
125     """
126     omega = self.omega
127     ETA = G0.copy()*cos(omega*t) + G1.copy()*sin(omega*t)
128     PHI = (-G0.copy()*sin(omega*t) + G1.copy()*cos(omega*t))/omega
129     return ifft2(ETA), ifft2(PHI)
130
131
132 def PHI_from_G(self, G0, G1, t):
133     omega = self.omega
134     PHI = (-G0.copy()*sin(omega*t) + G1.copy()*cos(omega*t))/omega
135     return PHI
136
137
138
139
140
141 def V2(self, G0, G1, t):
142     """ Calculate the term where the bottom is included """
143
144     phi_B = ifft2(self.PHI_from_G(G0, G1, t)/np.cosh(self.k))
145     PHI_B = fft2(phi_B)
146     phi_B_x = ifft2(1j*self.kxv*PHI_B)
147     phi_B_y = ifft2(1j*self.kyv*PHI_B)
148
149     tmpx = fft2(self.delta*phi_B_x)*self.zero_padding
150     tmpy = fft2(self.delta*phi_B_y)*self.zero_padding
151     V_2 = 1j*(self.kxv*tmpx + self.kyv*tmpy)/np.cosh(self.k)*self.
zero_padding
152     return V_2
153
154

```

```

155 def RHS(self, G0, G1, t):
156     """
157     The right hand side in the differential equation for G
158     Use source_term from inheriting class
159     """
160     V_2 = self.V2(G0, G1, t)
161     RHS0 = self.omega*fft2(self.source_term(t))*sin(self.omega*t)
162     + V_2*cos(self.omega*t)
163     RHS1 =-self.omega*fft2(self.source_term(t))*cos(self.omega*t)
164     + V_2*sin(self.omega*t)
165     return RHS0, RHS1

```

F.2 Datterklasse med trykkforstyrrelse

```
1 import numpy as np
2 from numpy import sin, cos, pi, tanh
3 from PotentialSolver3D_bunn import PotentialSolver3DLIN_bunn as
   PotentialSolver3D
4
5
6
7
8 class fPotentialSolver3D(PotentialSolver3D):
9
10     """
11     Computes the surface elevation generated by a moving pressure
12     distribution.
13     Start from rest is assumed
14
15     Usage:
16
17     # Values that must be set
18     x,y = one dimentional arrays
19     F, Pm, Lx, Ly, alpha, beta, t0 = scalars defining the pressure
20     distribution
21     dt = timestep
22     freq = how often user_action is called
23     number_of_prints = number of times user_action is called
24
25
26     # example for user defined function for handling eta and t
27     user_action = lambda eta, t, counter: np.savetxt('eta_%02d.dat'
28         %counter, np.real(eta))
29
30     # Initializing the solver
31     problem = fPotentialSolver3D(x, y)
32     problem.set_pressure_parameters(F, Pm, Lx, Ly, alpha, beta, t0)
33     problem.set_delta(dB, b0, b1, s1, s2)
34
35     # Integrate forward in time from t=0 to t=dt*freq*
36     number_of_prints
37     t, eta = problem.solve(dt, freq, number_of_prints, user_action)
38
39     """
40
41     def __init__(self, x, y):
42         PotentialSolver3D.__init__(self, x, y)
43
44         #Set the source term used in superclass to preferred pressure
45         distribution
46         self.source_term = self.P_tanh
47
48         #two dimentional domain
49         self.xv, self.yv = np.meshgrid(x,y, indexing='ij')
50
51         #Set the initial state to rest
52         self.set_initial_conditions(np.zeros_like(self.omega), np.
53             zeros_like(self.omega))
```

```

50
51
52 def set_pressure_parameters(self, F, Pm, Lx, Ly, alpha, beta,
53     t0, x0)
54     self.F, self.Pm, self.Lx, self.Ly, self.alpha, self.beta, self
55     .t0, self.x0 = F, Pm, Lx, Ly, alpha, beta, t0, x0
56
57 def P_tanh(self, t):
58     """
59     The pressure distribution applied on the free surface
60     Lx, Ly --> length and width of pressure
61     alpha, beta --> steepness longitudinal and transversal
62     Pm --> Maximum value
63     F --> Froudenumber - velocity of the pressure distribution
64     t0 --> timeframe of acceleration from rest to F
65     """
66     xv, yv, F, Lx, Ly, Pm, alpha, beta, t0 = \
67         self.xv, self.yv, self.F, self.Lx, \
68         self.Ly, self.Pm, self.alpha, self.beta, self.t0
69
70     # Accelerate from rest
71     t_rel = t/float(t0)
72     if t_rel <= np.pi/2.:
73         Pm = Pm*sin(t_rel)
74         x_pos = F*t0*(1-cos(t_rel))
75     else:
76         x_pos = F*(t-t0*(np.pi/2.-1))
77
78     X = xv - x_pos -x0
79
80     #The pressure distribution
81     p_tmp = (1./4.)*(tanh(alpha*(X+Lx/2.)) - tanh(alpha*(X-Lx/2.))
82     ) \
83         *(tanh(beta*(yv+Ly/2.)) - tanh(beta*(yv-Ly/2.)))
84
85     #Make sure that the maximum pressure is Pm (normalize pressure
86     distribution)
87     p = Pm*p_tmp/p_tmp.max()
88     return p

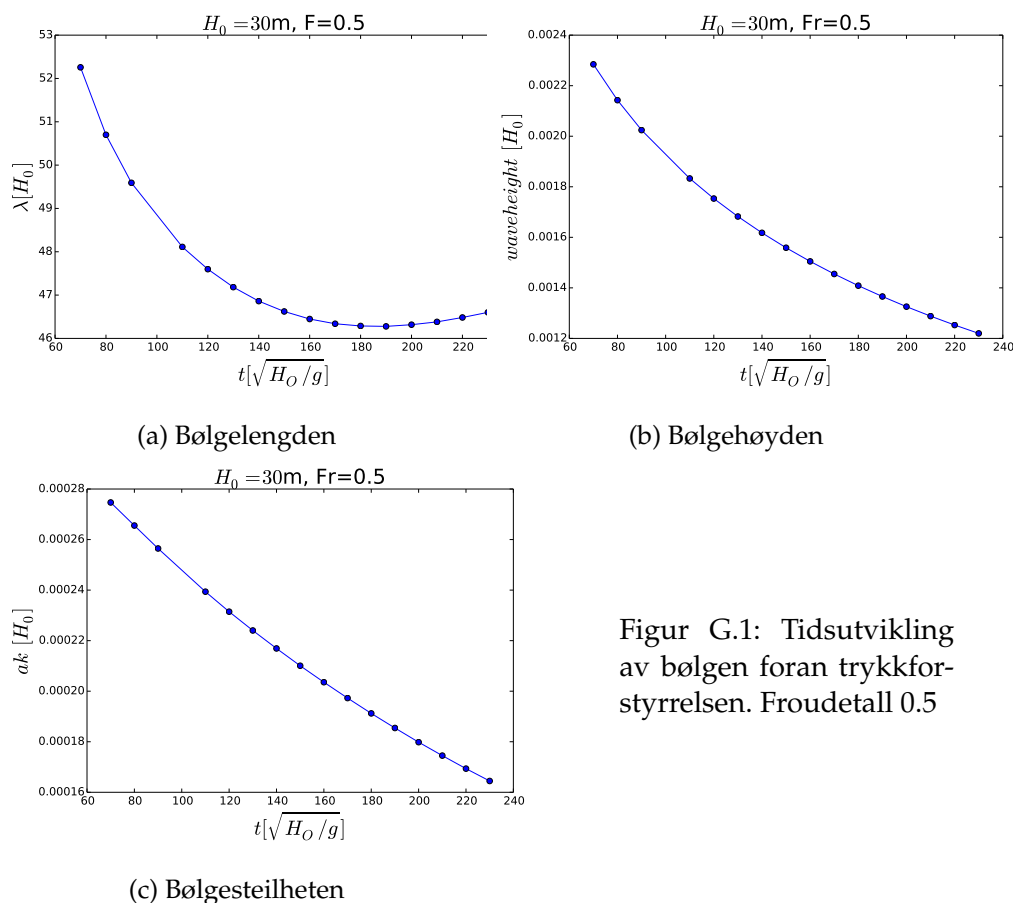
```

Tillegg G

Beregninger med flat bunn

G.1 Tidsutvikling med Froudetall en halv

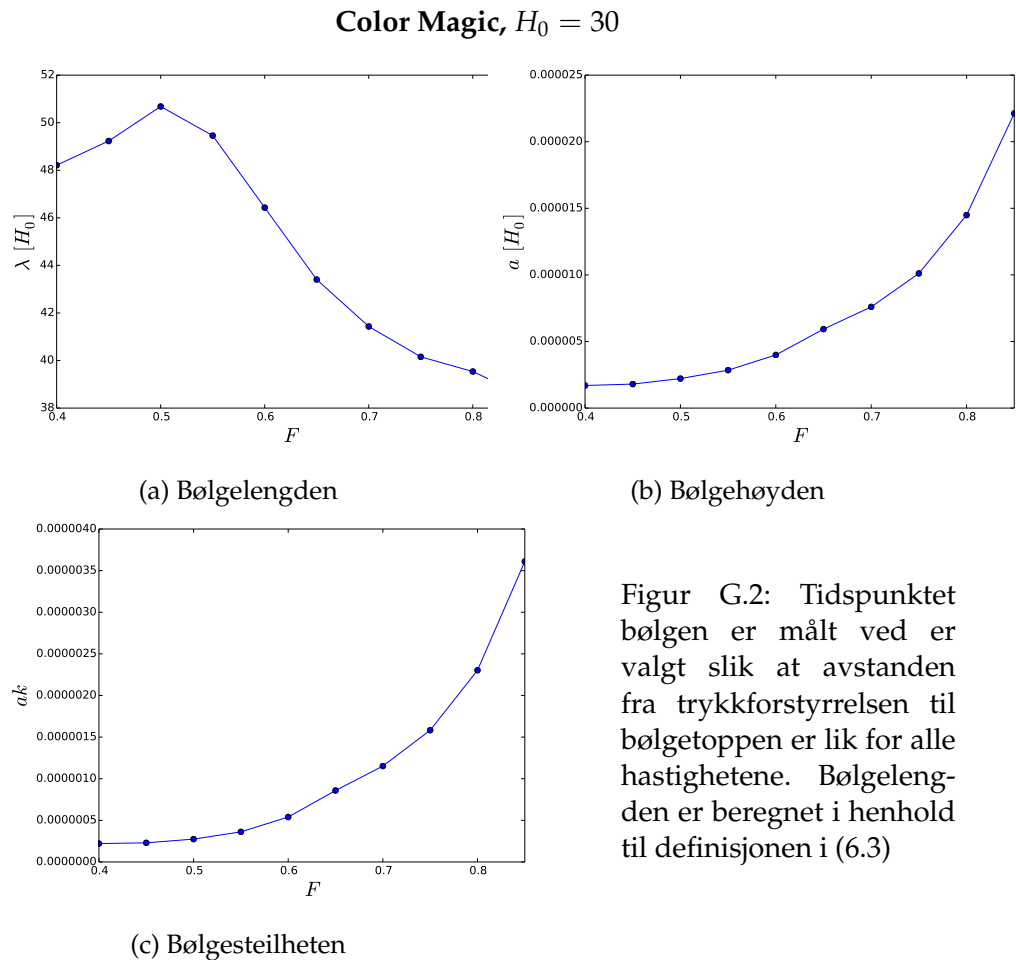
Figur G.1a gir tidsutviklingen av lengden til den ledende bølgen. Høyden til den ledende bølgen vist i figur G.1b viser, som forventet, at høyden synker når bølgen stråler vekk fra båten. Fra G.1c ser vi at lineærteori er en god tilnærming.



Figur G.1: Tidsutvikling av bølgen foran trykkforstyrrelsen. Froudetall 0.5

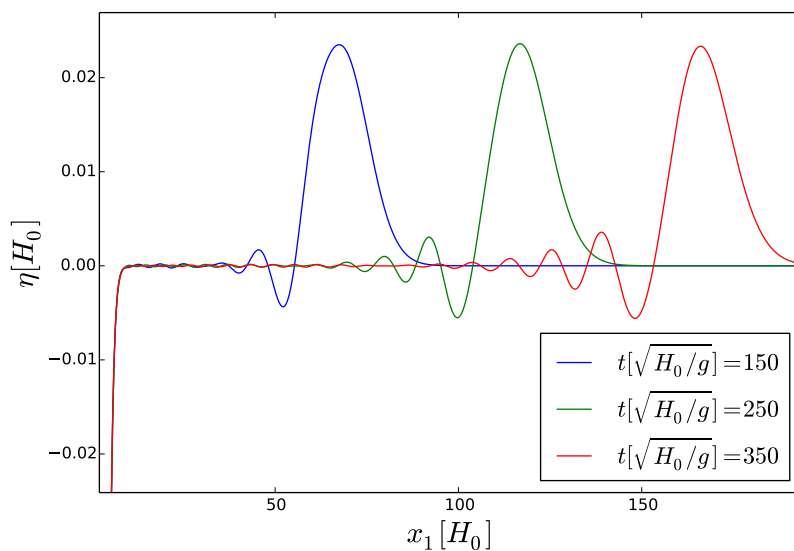
G.2 Froudetallsutvikling ved $T[\sqrt{H_0/g}] = 150$

Tidligere studier av bølger som beveger seg oppstrøms har konsentrert seg om hastigheter fra rundt $F = 0.8$, altså de øvre verdiene i figur G.2a og G.2b. Fra figurene kommer det tydelig fram at Froudetall på 0.5 gir en bølge med mye lavere bølgehøyde og lengre bølgelengde enn Froudetall på mellom 0.8 og 1 gir. Bølgesteillheten $ak = \frac{2\pi a}{\lambda}$ som er et mål på ikke-lineariteten er vist i figur G.2c, og vi ser at lineær teori er en god tilnærming.



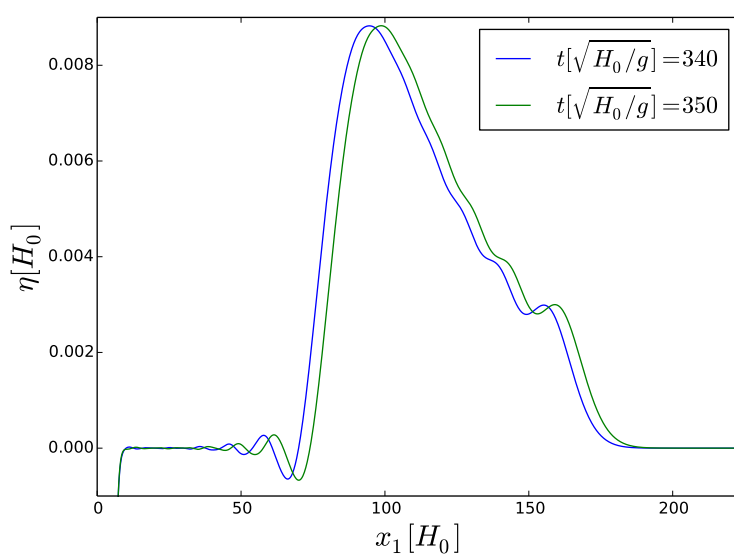
G.3 Kanalbredde på 200m

Color Magic, $H_0 = 30$, $F = 0.5$



Figur G.3: η foran båten

Figur G.4 viser hevingen foran trykkforstyrrelsen. Domener er her en kanal på 200m og forstyrrelsen beveger seg med $F = 0.6$, så dette representerer situasjonen i den smaleste kanalen og med den høyeste hastigheten. Fra midten av skipet og 1 km fremover er den maksimale hevingen 0.06 cm.



Figur G.4: η foran båten. Tiden brukt til å akselerere trykket er her veldig lang for at oppstartseffekten skal bli så liten som mulig

Bibliografi

1. Akylas, T. R. On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution. *Journal of Fluid Mechanics* **141**, 455–466 (1984).
2. Boussinesq, J. Essa sur la theorie des eaux courantes. *Memoires presentes par divers savants a l'Academic des Sciences de l'Institut National de France. Tome XXIII* (1877).
3. Boussinesq, J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus Acad. Sci (Paris)* **72**, 755–759 (1871).
4. Boussinesq, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 55–108 (1872).
5. Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods* (Courier Dover Publications, 2001).
6. Clamond, D., Fructus, D., Grue, J. & Kristiansen, Ø. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part II: Generation and absorption. *Journal of Computational Physics* **205**, 686–705 (2005).
7. Clamond, D. & Grue, J. A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *Journal of Fluid Mechanics* **447**, 337–355 (2001).
8. ColorLine. *Fakta om Color Magic* 2015. <https://www.colorline.no/praktisk_informasjon/fakta_om_color_magic> (sjekket 25.05.2015).
9. DFDS, S. *Pearl Seaways* 2015. <<http://www.dfdsseaways.dk/pdf/fakta/tekniske-data-oversigt-pearl-seaways-03-2014.pdf>> (sjekket 25.05.2015).
10. Ertekin, R. C. *Soliton generation by moving disturbances in shallow water: theory, computation and experiment* ph.d.-avh. (University of California, Berkeley, 1984).
11. Ertekin, R. C., Webster, W. C. & Wehausen, J. V. *Ship-generated solitons* (Office of Naval Research, Fluid Dynamics Branch, 1984).
12. Fornberg, B. *A practical guide to pseudospectral methods* (Cambridge university press, 1998).
13. Fructus, D., Clamond, D., Grue, J. & Kristiansen, Ø. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations: Part I: Free space problems. *Journal of Computational Physics* **205**, 665–685 (2005).

14. Fructus, D. & Grue, J. An explicit method for the nonlinear interaction between water waves and variable and moving bottom topography. *Journal of Computational Physics* **222**, 720–739 (2007).
15. Gjevik, B., Pedersen, G. K. & Trulsen, K. *Hydrodynamic Wave Theory* (2010).
16. Grue, J. Nonlinear interfacial wave formation in three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics* **767**, 735–762 (2015).
17. Grue, J. On four highly nonlinear phenomena in wave theory and marine hydrodynamics. *Applied ocean research* **24**, 261–274 (2002).
18. Huang, D. B. mfl. *Ships moving in the transcritical range i Proc. Conf. on Behaviour of Ships in Restricted Waters, Varna, Bulgaria* (1982), 26–1.
19. Johnson, R. S. Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries equation (with applications to solitary wave development on a shelf). *Journal of Fluid Mechanics* **54**, 81–91 (1972).
20. Korteweg, D. J. & de Vries, G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Channel, and On a New Type of Long Stabilizing Wave. *Phil. Mag* **5**, 41 (1895).
21. Kystverket. *Kystinfo Kart* 2015. <kart . kystverket . no> (sjekket 25.05.2015).
22. Langtangen, H. P. *A Primer on Scientific Programming with Python (Texts in Computational Science and Engineering)* kap. Programming of differential equations (Springer, 2012).
23. Lee, S. J., Yates, G. T. & Wu, T. Y. Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances. *Journal of Fluid Mechanics* **199**, 569–593 (1989).
24. Madsen, O. S. & Mei, C. C. The transformation of a solitary wave over an uneven bottom. *Journal of Fluid Mechanics* **39**, 781–791 (1969).
25. Mei, C. C. Radiation of solitons by slender bodies advancing in a shallow channel. *Journal of Fluid Mechanics* **162**, 53–67 (1986).
26. Mei, C. C., Stiassnie, M. & Yue, D. K. P. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Part 2: Nonlinear Aspects* (World Scientific, 2005).
27. Newman, J. N. *Marine Hydrodynamics* (Wei Cheng Cultural Enterprise Company, 1977).
28. Pedersen, G. K. Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds. *Journal of Fluid Mechanics* **196**, 39–63 (1988).
29. Peregrine, D. H. Calculations of the development of an undular bore. *Journal of Fluid Mechanics* **25**, 321–330 (1966).
30. Rayleigh, L. XXXII. On waves. *Philosophical Magazine Series 5* **1**, 257–279 (1876).
31. Russel, J. S. *Report of the British Association for the Advancement of Science*. 730 (London., 1844).

32. Wehausen, J. V. & Laitone, E. V. *Surface waves* kap. Waves resulting from variable pressure distributions (Springer, 1960).
33. Wu, T. Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances. *Journal of fluid mechanics* **184**, 75–99 (1987).
34. Zabusky, N. J. & Kruskal, M. D. Interaction of Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Physical Review Letters* **15**, 240–243 (6 1965).